



# Tratamiento de datos experimentales

José Fernando Jiménez Mejía

# Tratamiento de datos experimentales

José Fernando Jiménez Mejía

Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín  
Facultad de Minas

Diciembre, 2009

## ***Botella al mar***

El mar un azar

VICENTE HUIDOBRO

Pongo estos seis versos en mi botella al  
mar

con el secreto designio de que algún día

llegue a una playa casi desierta

y un niño la encuentre y la destape

y en lugar de versos extraiga piedritas

y socorros y alertas y caracoles.

**Mario Benedetti**

**(1920-2009)**

## *Prólogo*

Tal y como resulta evidente la importancia del análisis experimental y cuantitativo en todas las áreas de la ciencia y de la técnica de hoy, de la misma manera debería considerarse fundamental en la formación de los ingenieros y científicos el conocimiento de algunos elementos básicos para el tratamiento de los datos experimentales. Esta es una de las razones por las cuales asombra tanto la demora de nuestras Facultades en la introducción de tales materias en los programas curriculares, no tanto como asignatura especial y separada sino, de un modo más directo, como la práctica consciente y sistemática de técnicas de manejo de datos integradas a las asignaturas. En este sentido, este texto se propone contribuir a esa cultura general sobre el experimento y la medición, sin pretender agotar un asunto que, a todas luces, se constituye en una fértil área de investigación y producción documental en el mundo. A estas consideraciones habría que añadir un interés específico del autor en revalorar y promover la atención cultivada por las labores experimentales, que hoy y siempre serán fuente privilegiada e imprescindible para el conocimiento científico y el desarrollo tecnológico.

En consecuencia, este pequeño libro está dirigido en primer lugar a estudiantes de las escuelas de ingeniería del país, quienes encontrarán algunos elementos conceptuales y prácticos para el tratamiento experimental; aunque, sin duda, también podrá servir de material de consulta para técnicos, docentes e ingenieros ocupados en el manejo de datos de campo o laboratorio, e incluso en el diseño de programas experimentales complejos. El plan de temas es el siguiente: un primer capítulo dedicado a algunas consideraciones de tipo epistemológico, que puede servir de punto de partida para introducir conversaciones de grupo en las aulas o para emprender otras lecturas sobre aspectos como la percepción, la medición y la experimentación. Un segundo capítulo sobre la teoría del error experimental, sus componentes de sesgo y precisión, y algunas observaciones sobre los sistemas de medida y los cálculos numéricos. El tercer capítulo se concentra en la estimación de los errores de precisión para muestras de una variable aleatoria. El capítulo cuarto está dedicado a desarrollar la fórmula general para la propagación de errores experimentales y presenta algunos ejemplos. Y el capítulo quinto, finalmente, introduce el método de los mínimos cuadrados para el ajuste numérico de funciones a parejas de datos. Estos capítulos incluyen series de ejercicios propuestos que sirven para desarrollar una cierta habilidad y confianza en el manejo de las técnicas presentadas, y referencias bibliográficas que son útiles al momento de precisar o ampliar ciertos conceptos.

Este texto es producto de muchas personas que me han acompañado por 20 años en la actividad docente universitaria, desarrollada principalmente en la Escuela de Geociencias y Medio Ambiente y el Laboratorio de Hidráulica y Mecánica de Fluidos, en la Facultad de Minas. Debo por tanto, en principio, el reconocimiento a los estudiantes y docentes que comentaron los textos y contribuyeron de alguna manera a su mejoramiento.

José Fernando Jiménez Mejía  
Diciembre, 2009

Al profesor Jorge Alberto Naranjo,  
inolvidable maestro de la Facultad de  
Minas, quien nos enseñó a valorar  
esta tremenda aventura de la vida y  
el conocimiento.  
A él le dedico este libro, como prenda  
de una inmensa amistad, gratitud y  
aprecio.

## CAPÍTULO 1

# TEORÍA DEL EXPERIMENTO

Es difícil imaginar una época como la nuestra para la cual resulte tan importante el papel epistemológico de la experiencia en las operaciones de creación. No nos referimos exclusivamente al campo de las ciencias, con respecto a las cuales es más fácil corroborar una multiplicidad de interacciones entre las diferentes lógicas que a ellas les competen (con sus proposiciones) y la experimentación. También la filosofía y el arte contemporáneos se han volcado resueltamente hacia la experiencia tratando de escapar a las trampas lingüísticas y de la razón, las cuales traban con sus premisas los movimientos exploratorios y liberadores del pensamiento.

Por una parte, la experiencia actualiza, al tiempo que amplía, en múltiples direcciones, nuestro sentido de la realidad, siendo este aspecto ya de por sí notable. En varios periodos de la historia de la humanidad han surgido distintas modalidades de idealismo, siempre empeñadas en menospreciar o minimizar la riqueza inmanente del acontecimiento natural. Al florecimiento del pensamiento presocrático en Grecia, materialista y afirmativo, le correspondió en suerte afrontar la propuesta platónica de las copias, según la cual lo real es apenas el reflejo imperfecto de otro mundo mejor, en tanto que perfecto, verdadero, acabado. Y en los albores de la modernidad europea, las corrientes humanistas del Renacimiento chocaron con una contrareforma feroz, que se opuso a sangre y fuego a las iniciativas de producir conocimiento y acción en un plano amplio de experimentación científica, y en un contexto social más abierto y democrático.

Por otra parte, la gnoseología y la epistemología han reservado siempre a la experiencia un lugar principal en relación con los procesos de producción de conocimiento. Francis Bacon, fundador del empirismo moderno, escribió: “la experiencia que se nos presente se denomina caso y si es buscada expresamente toma el nombre de experimento. Pero la experiencia vulgar no es otra cosa que, según se dice, una escoba desatada, un proceder a tientas, como el proceder de quien camina de noche de un lado a otro con la esperanza de acertar el camino justo, en tanto que sería más prudente y útil esperar el día o encender una luz y de tal manera localizar el camino. El verdadero orden de la experiencia comienza al encender la luz, con él más tarde aclara el camino, empezando por la experiencia ordenada y madura y no ya por la intermitente y de cualquier modo; primero deduce los axiomas, más tarde realiza nuevos experimentos” (*Novum Organum*, I, 101).

Así pues, bien sea desde el punto de vista de la libertad individual o de la preservación de la autonomía y salud política de los pueblos, conviene siempre cultivar los hábitos de los que se nutre la experiencia. Este es el camino más seguro para estimular el espíritu creativo, para abonar nuestra creencia en el mundo y para quedar a mejor resguardo de los especuladores de “conocimiento”, que buscan apropiarse de los logros del pensamiento humano para hacerlo materia de mercado, sin que importe la ética.

## 1.1 LA EXPERIENCIA COMO PERCEPCIÓN

La experiencia es, en el sentido más amplio, un acto de percepción, independientemente de que pueda ser controlada o no. Percibimos los seres humanos gracias a nuestros sistemas sensoriales, así como perciben (y experimentan) los animales gracias a su propia sensibilidad. Todas las especies vivas dependen en diversos grados y naturaleza de la percepción que tienen del mundo, con base en la cual pueden desarrollar sus estrategias de creación de un territorio, sobrevivencia y expansión: lo vemos en las plantas, en los protozoos y, por supuesto, de un modo más evidente o, mejor dicho, más próximo a la experiencia humana, en todos los mamíferos: el ratón que aprende a identificar las trampas, los perros que desarrollan conductas específicas con sus amos (o mejor, sus jefes de manada), el pequeño simio que aprende de su madre a cascar nueces con el uso de guijarros, el niño que se hace hombre por la vía de los juegos.

Las mismas especies se diferencian entre sí no tanto por la menor o mayor capacidad perceptiva sino por las señales del mundo que son capaces de percibir en función de su propia naturaleza. Aunque no conocemos el primer perro que haya ido a estudiar matemáticas a la escuela, tampoco somos capaces de oler como los canes a una cierta distancia; ni sumergidos en el mar escuchamos los cantos de las ballenas; ni vemos en el aire las corrientes térmicas coloreadas por el infrarrojo. Como decía Goethe: "Si el ojo no fuera adaptable a la luz solar, jamás podría distinguir la luz del sol"; o, dicho en otras palabras, toda fisiología es una construcción condicionada por la experiencia. Y esto no sólo en el sentido pasivo o negativo en que se entiende la necesidad, sino porque, enfrentado a problemas físicos concretos, todo viviente desarrolla, en el curso de su devenir biológico, mecanismos de lectura de la realidad que integra al aparato receptor. En este contexto resulta más fácil entender porqué las técnicas de experimentación evolucionan naturalmente de tal modo que, mediante nuevos aparatos de observación y de medida, se amplían las posibilidades de captar y registrar señales del mundo, muchas veces imperceptibles a los sentidos.

Sin embargo, la percepción no es una acción sencilla. Mezclados con el hecho natural o el artificialmente construido, hay aspectos subjetivos que tienden a imbricarse en las operaciones del pensamiento y hacen de la experiencia, como decía Bergson, un verdadero "mixto". No captamos el mundo sin más, como si fuéramos capaces de hacer registros "puros" y objetivos. En cambio, de la manera más sutil, se involucran en la experiencia una multiplicidad de conceptos, modelos de la realidad, memorias y percepciones que nos inducen a ver más unas cosas que otras, y a inferir ciertas conclusiones en particular. De este modo la ciencia, como por otra parte la filosofía, empeñadas ambas en comprender mejor la naturaleza de los fenómenos o acontecimientos de los cuales se ocupan, deben hacer un esfuerzo consciente y permanente para identificar las componentes que se anudan en los mixtos, razón por la cual, diríamos, parecería útil disponer en uno u otro caso de un método.

## 1.2 EL CONCEPTO DE MEDICIÓN

El concepto de mensurabilidad está fuertemente arraigado en el quehacer cotidiano de nuestras sociedades, no sólo en los campos de las ciencias y las tecnologías sino también en la vida personal y colectiva. A pesar de esto, en términos generales tenemos una visión muy pobre de cómo es que hemos llegado a vincular los números con las propiedades de las cosas y cómo es que utilizamos dichos números para describir los procesos que afectan el mundo físico que nos rodea. El estudio de los

orígenes de las matemáticas en Mesopotamia, Egipto, China e India sugiere que hubo desarrollos simultáneos de gran diversidad de técnicas numéricas, de cálculo y de medición, asociados a cierta variedad de usos prácticos. Como es apenas natural, las necesidades materiales de dichas culturas determinaron el carácter predominantemente “aplicado” de buena parte de los problemas cuantitativos que se han identificado a partir de los vestigios arqueológicos conocidos: la longitud del lado de un cuadrado, el área de una superficie, el volumen de un granero cilíndrico, son apenas unos ejemplos de medición vinculados a la crianza de animales, la producción de las cosechas, el comercio, el trazado de las primeras ciudades, etc.

Las técnicas de medición desarrolladas en aquellas civilizaciones antiguas parecen haber llegado a Grecia por diferentes vías y desde muy temprano, de modo que lo que se considera más auténticamente griego es la pregunta por los fundamentos epistemológicos de la medición. Recordemos la nota de Diógenes Laercio según la cual Tales de Mileto (fines del siglo VII a.C.), en los albores de la cultura helénica, “midió las pirámides por medio de la sombra, proporcionándola con la nuestra cuando es igual al cuerpo”. Aunque muy probablemente fue la secta filosófico-religiosa de los pitagóricos (siglo VI a.C.) la primera en expresar la firme intención de encontrar “la” relación entre los números y el mundo físico, hasta el punto de llegar a afirmar: “cada cosa que es accesible a nuestro conocimiento tiene un número, de modo que sin números no podemos ni entender ni conocer”; la visión radical de los filósofos pitagóricos se refleja claramente en un comentario de Aristóteles (384-322 a.C.) que encontramos en la *Metafísica*: “suponían que los elementos de los números eran los elementos de todas las cosas, y el cielo entero una escala musical y un número”.

Años después, en el *Teeteto* de Platón (428-/427-347 a.C.), Sócrates hace referencia al llamado principio de Protágoras con las siguientes palabras: “El hombre es la medida de todas las cosas, de la existencia de las que existen, y de la no existencia de las que no existen”. El relativismo subjetivista de Protágoras (c. 480-410 a.C.) estaba basado en la constatación de la permanente fluencia de las cosas y de las sensaciones, pero su posición no implicaba que hubiera un criterio de verdad para cada hombre, sino más bien que en cada hombre variaba tal criterio según las cambiantes circunstancias, de modo que sólo podía llamarse verdad a lo que se afirmaba de la realidad en el momento en que juzgaba algo acerca de ella. Platón, que no fue del todo ajeno a este tipo de planteamientos, reaccionó entonces con decisión ante la posibilidad de definir el conocimiento en función de hechos meramente circunstanciales, así que su propia teoría de las ideas consistió en presentar a éstas como si fueran modelos de las cosas o, mejor aún, como si las ideas fueran las cosas mismas pero en estado de absoluta perfección. De este modo la idea platónica, no siendo algo que pudiera ser captado por los sentidos sino por medio de la inteligencia, se contrapone desde su formulación a la evidencia fáctica de los fenómenos naturales, socava la confianza y el interés en el mundo de lo concreto, y demerita la actividad experimental.

Pero el documento que muestra de una manera más clara lo que llegó a significar una “medida” en el mundo griego la encontramos en el Libro V de los Elementos de Euclides (~300 a.C.), el cual, se dice, pudo ser transcripción de la obra de Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.). Según las definiciones I a III de dicho libro: “una cantidad menor se llama parte de otra mayor, cuando la menor mide a la mayor; una cantidad mayor se dice múltiplo de otra menor, cuando la menor mide a la mayor; [y] razón es el respecto, o relación mutua, que tienen entre sí dos cantidades de un mismo género en cuanto a su magnitud”. En otras palabras, si A, B, C y D son magnitudes de una misma clase (por ejemplo masas), pudiéramos decir que la razón de A a B es la misma razón que de C a D sólo si  $A=nB$  y  $C=nD$ , donde n, un número racional mayor que la unidad según el texto euclidiano, proporciona la medida.



Aunque en la Edad Media hubo cierto interés por la teoría de los cálculos y de la medición, durante este periodo, y sobre todo al final de él, predominó en occidente un discurso de las ciencias de corte aristotélico, tan idealizado y cristianizado, que el contraste con el pensamiento científico y técnico grecolatino no podría ser mayor. Fue sólo hasta la época moderna cuando Galileo y sus contemporáneos se atrevieron a enunciar en lenguaje matemático una amplia variedad de problemas mecánicos, que iban desde el estudio de la caída de graves por planos inclinados hasta el entendimiento de diversos fenómenos astronómicos recién descubiertos, pasando por el análisis del comportamiento mecánico de cuerpos sólidos y fluidos en circunstancias muy disímiles. El propio Galileo escribió en su libro titulado *Il Saggiatore*: “el gran libro de la naturaleza...está escrito en términos matemáticos” y, tal como lo señala Finkelstein (2003), estableció un programa de trabajo que sigue siendo un reto para la ciencia actual: “contar lo que es contable, medir lo que es mensurable y lo que no es mensurable hacerlo mensurable”. Esta gran revolución teórica y experimental condujo a la formulación de las tres leyes básicas que soportan el corpus teórico de la mecánica clásica, las cuales fueron propuestas por Isaac Newton en su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, a fines del siglo XVII. Desde entonces la medición ha estado presente en las diferentes vertientes científicas de un modo tan marcado que resultaría difícil concebir una ciencia siquiera –incluidas las humanas, las biológicas, sociales, etc.- capaz de prescindir por completo de la medición y los métodos cuantitativos.

Pero, en la actualidad, ¿qué es la medición y, en correspondencia, qué caracteriza propiamente lo que puede ser medido? Los metrologos reconocen en los trabajos pioneros de Helmholtz (1887), Hoelder (1901) y Campbell (1920) los primeros intentos encaminados a definir explícitamente las bases epistemológicas de la medición; aunque en ellos predomina todavía un enfoque desde las ciencias físicas, estos avances teóricos acerca de la naturaleza de la medición fueron y son referencias obligadas a este respecto. Concretamente, Hermann Helmholtz (1821-94) se preguntó sobre “el significado objetivo de expresar mediante números concretos las situaciones que conciernen a los objetos reales”. Este autor planteó una analogía entre la medición y las operaciones de conteo, aduciendo que la categoría de mensurable se aplica a una determinada cantidad en tanto que se puede considerar a ésta una suma o acumulación de elementos (o unidades) que comparten entre si las mismas características. Según Helmholtz la operación de conteo remite, en primer lugar, a las propiedades de los números naturales y a un orden basado en la relación “mayor o igual que”; en segundo lugar, el conteo implica la suma con todas sus propiedades lógicas, es decir: cualquier par de objetos contables de la misma clase  $\{a,b\}$  se pueden comparar entre si y cumplen las leyes transitiva, conmutativa, asociativa y monótona (si  $a \geq b$  y  $c = d$ , entonces  $a + c \geq b + d$ ). Consideremos, por ejemplo, la medición de masas mediante una balanza de brazos iguales: entre ellas se puede determinar cuál es mayor, o si son similares; ambas se pueden sumar y pesar poniéndolas sobre un mismo plato, y colocando en el otro una masa  $c$  equivalente; asimismo se puede comprobar que si  $a > b$  y  $b > c$  entonces  $a > c$ ; o que  $a + b = b + a$ ; o que  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

El físico inglés Norman Robert Campbell (1880-1949), por su parte, se planteó explícitamente, como Helmholtz, el porqué algunas cosas pueden medirse y otras no. En palabras de Campbell: “Tengo sobre mi mesa una bandeja con varios cristales similares. Estos cristales tienen muchas propiedades, entre las cuales se pueden mencionar las siguientes: número, peso, densidad, dureza, color, belleza. Las primeras tres cualidades son indudablemente susceptibles de medición – a menos que se juzgue que el número debe ser excluido por ser más fundamental que cualquier otra propiedad medida; en lo concerniente a la dureza es difícil decir si se puede o no medir, ya que, aunque hay varios sistemas de uso común para determinar la dureza,

generalmente queda la sensación de que ninguno de ellos es completamente satisfactorio. El color no se puede medir como las otras cantidades, es decir que es imposible denotar el color de un objeto por un número, es decir con la misma libertad y arbitrariedad con que se elige un número para representar el peso o la densidad. La última propiedad, la belleza, ciertamente no se puede medir, a menos que aceptemos el punto de vista corriente según el cual la belleza la determina el valor del mercado. ¿Cuál es, pues, aquella diferencia entre las propiedades que determina la posibilidad o imposibilidad de medirlas?”. Ante este planteamiento, Campbell concluye que una propiedad se puede considerar mensurable si se prueba que existe para ella una relación de orden empírico y se encuentra una ley física de carácter aditivo, para el caso de las magnitudes denominadas fundamentales, que admita la construcción de una escala de medida y comparación, como ocurre con la masa; o una ley física, para las magnitudes derivadas, que permita que la magnitud en consideración se pueda expresar en términos de otras cantidades, como ocurre con la densidad.

En 1932, atendiendo el creciente interés por compatibilizar las técnicas experimentales y cuantitativas que se estaban desarrollando en áreas del conocimiento diferentes a las físicas, la *British Association for the Advancement of Science* encargó a un Comité, conformado por físicos y psicólogos, el estudio de las posibilidades de estimar cuantitativamente la “intensidad de las sensaciones”. El reporte final fue entregado por dicho Comité en el año 1939, y mostró las serias dificultades que había para reconciliar los diferentes puntos de vista sobre este problema, pues resultaba imposible encontrar una ley aditiva aplicable en tales casos.

No obstante las conclusiones del reporte, entre los trabajos discutidos por el Comité se encontraban planteamientos que invitaban a una mayor apertura conceptual, como los del profesor Stanley Smith Stevens (1906-1973), fundador del Laboratorio de sicoacústica de la Universidad de Harvard. Por una parte, Stevens formuló una Teoría de Escalas basada en el supuesto de que una “medición es la asignación de numerales a objetos o eventos de acuerdo con una regla” (Fig.1.1); desde este punto de vista, aunque la medición seguía siendo considerada un hecho objetivo, se reconocía que también era el resultado de una abstracción, de un modelo matemático (aquí llamado “regla”). En segundo lugar, esta propuesta sugería dos vías para superar el enfoque tradicional de las ciencias físicas sobre el tema de las mediciones: a) ampliar las escalas básicas de medición, para lo cual Stevens planteó una clasificación con cuatro categorías (Tabla 1.2), que se definían a partir de la conservación (invariancia) del conjunto de las relaciones y la estructura algebraica propias de cada escala; y b) considerar la igualdad de proporciones como una relación empírica válida.

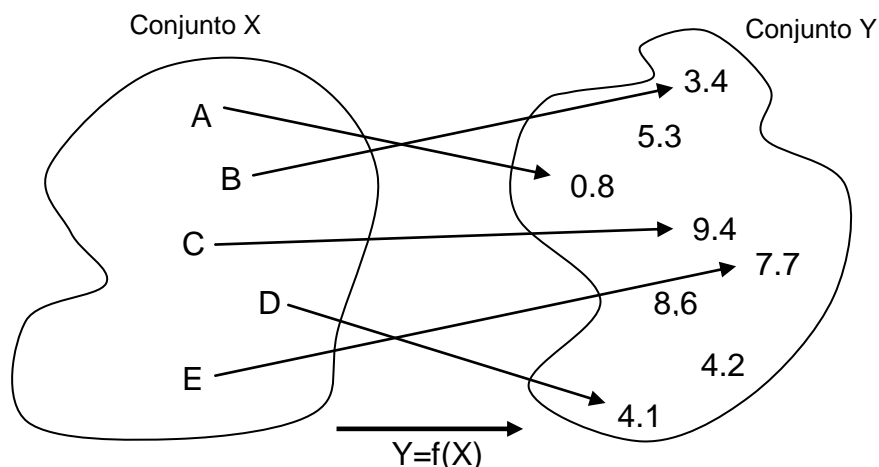


Figura 1.1. Construcción de una escala de medida (adaptada de Bullock y Deckro, 2006).

Tabla 1.1. Clasificación de las escalas de medida según Stevens (Tomado y modificado a partir de Rossi, 2007)

Escala	Operaciones empíricas	Estructura matemática	Ejemplos
Nominal	De igualdad	$M(a)=f[m(a)]$ donde $f$ es una función biunívoca	Umbral de percepción, detección de defectos
Ordinal	De menor a mayor	$M(a)=f[m(a)]$ donde $f$ es una función monótona creciente	Dureza de los minerales, Intensidad de terremotos
De intervalo	De igualdad por intervalos o por diferencias	Lineal o por afinidad, del tipo $M(a)=\alpha \cdot m(a)+\beta$ donde $\alpha > 0$ .	Temperatura, posición, tiempo del calendario
Proporcional	Igualdad de proporciones	Similaridad del tipo $f(a)=\alpha \cdot m(a)$ donde $\alpha > 0$ .	Longitud, masa, densidad, ruido, brillo











Llegada la segunda mitad del siglo XX, los estudios y la controversia en torno al tema de la mensurabilidad condujo a la formulación de una propuesta conocida como la teoría representacional, la cual busca complementar los aportes teóricos hechos por Campbell y Stevens. Dicha teoría plantea que teoría de escalas de Stevens requiere un teorema de representación que muestre cómo las relaciones empíricas se proyectan sobre una escala de relaciones numéricas; y un teorema de unicidad, que especifique la clase de transformaciones correspondientes a las propiedades de la escala. Uno de los principales promotores de esta teoría es Ludwik Finkelstein, quien define la medición en un sentido amplio como: “un proceso de asignación empírica y objetiva de símbolos a los atributos de unos objetos y eventos del mundo real, de manera que los representen o los describan”. Es decir, según agrega el mismo Finkelstein: “La definición de medición... pone el énfasis en que es el resultado de un proceso empírico. Esto quiere decir, primero, que proviene de una observación y no, por ejemplo, de un experimento mental. Además, el concepto de la propiedad medida debe estar basado en relaciones determinables empíricamente y no, digamos, por convención”. E igualmente: “La medición... es un proceso objetivo. Por ello se quiere indicar que los números asignados a una propiedad por medio de la medición deben, dentro de unos límites de error, ser independientes del observador”. En trabajos posteriores Finkelstein distingue entre mediciones “fuertes” y “débiles”, donde las primeras corresponden al paradigma de las ciencias físicas, cuyos procedimientos de análisis están generalmente respaldados por teorías y relaciones funcionales capaces de vincular incluso varios tipos de variables; y las segundas, las mediciones débiles, que conciernen más a las ciencias sociales y del comportamiento.

La tabla 1.2 recoge algunos elementos básicos de la teoría representacional. Para mostrar cómo funciona tomemos por caso la tabla monotónica creciente de dureza de los materiales de Mohs (1773-1839), que va desde el nivel 1 para en talco hasta 10 para el diamante (Tabla 1.3). El uso de esta tabla consiste en determinar el mineral más duro que un material en cuestión es capaz de rayar, dado lo cual se asigna una medida de dureza de acuerdo con la escala. Es decir que si a un par de minerales

Tabla 1.2. Clasificación de las principales escalas de medida según la teoría representacional (Tomado y modificado a partir de Rossi, 2007)

Escala	Relaciones empíricas básicas	Representación	Transformaciones admisibles
Nominal	Equivalencia entre los elementos de cada clase	$a \sim b \leftrightarrow m(a) = m(b)$	Bi-unívoca
Ordinal	Orden débil entre los objetos	$a \geq b \leftrightarrow m(a) \geq m(b)$	Monótona creciente
De intervalo o diferencial	Orden débil entre los objetos y por intervalos	$\Delta ab \geq \Delta cd \leftrightarrow m(a)-m(b) \geq m(c)-m(d)$	Lineal positiva $m' = \alpha m + \beta, \alpha > 0$
Proporcional	Orden débil entre los objetos y por intervalos, más una operación de concatenación	$a \sim b + c \leftrightarrow m(a) = m(b) + m(c)$	Similaridad $m' = \alpha m, \alpha > 0$

Tabla 1.3. Escala ordinal de Mohs para definir la dureza de los materiales propuesta en 1812.

Escala de dureza de Mohs	Mineral	Imagen
1	Talco ( $Mg_3Si_4O_{10}(OH)_2$ )	
2	Yeso ( $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ )	
3	Calcita ( $CaCO_3$ )	
4	Fluorita ( $CaF_2$ )	
5	Apatita ( $Ca_5(PO_4)_3(OH, Cl, F)$ )	
6	Feldespato ( $KAlSi_3O_8$ )	
7	Cuarzo ( $SiO_2$ )	
8	Topacio ( $Al_2SiO_4(OH, F)_2$ )	
9	Corindón ( $Al_2O_3$ )	
10	Diamante (C)	

cuyas durezas son a y b - entre los cuales a es más duro que b-, se les asignan respectivamente unos números (medidas de dureza) m(a) y m(b) es porque obedecen la siguiente relación:

$$a \geq b \leftrightarrow m(a) \geq m(b)$$

Por ejemplo, si algún material es rayado por la apatita pero no por la fluorita, su dureza en la escala de Mohs está entre 4 y 5. Esta es una escala ordinal.

Lo dicho hasta el momento sobre la medición y la mensurabilidad es apenas una somera revisión sobre un tema complejo. Así como hay una deriva más o menos clara hacia la teoría representacional, hay otras vías de análisis que un lector interesado podrá consultar en las referencias bibliográficas de este capítulo. En un mundo como el nuestro, donde cada vez son más importantes las ciencias sociales y del comportamiento, las técnicas del dolor y la emoción, la cibernética de máquinas inteligentes, entre otras áreas de interés científico y tecnológico, lo menos que se puede hacer es poner de presente que hay problemas de medición imposibles de abordar desde el enfoque “duro” de la física y la ingeniería tradicional.

### 1.3 FASES DE LA EXPERIMENTACIÓN CIENTÍFICA

Es un hecho que el conocimiento en general, y no sólo el llamado “científico”, se beneficia y enriquece cuando se articula con procedimientos sistemáticos de medición, a los cuales nos podemos referir ahora en un sentido más amplio que el comúnmente adoptado por técnicos o profesionales de las ciencias naturales. En la tabla 1.4 se muestra un paralelo entre una versión ligeramente actualizada del llamado método científico y el papel que cumple en cada una de las etapas aquello que se mide (Sydenham, 2003).

Tabla 1.4. Etapas del método científico y su paralelo con las operaciones de medición (adaptado de Sydenham, 2003)

Método científico generalizado	Operaciones de medición
Fase 1. Desarrollo de la hipótesis 1. Identificación del problema 2. Formulación de la hipótesis	1. Desarrollo de los objetivos de medición 2. Prediseño del plan de mediciones
Fase 2. Experimento 3. Plan del experimento 4. Realización del experimento 5. Análisis de resultados	3. Diseño y montaje del sistema de medición 4. Registro de los datos 5. Cálculos experimentales
Fase 3. Verificar la hipótesis 6. Chequear la hipótesis 7. Refinar la hipótesis	6. Análisis y reporte de los datos 7. Reanudación de pruebas o extrapolación de resultados

En la actualidad las ciencias le abren paso a un método experimental que puede ser llamado sistemático; pero en la práctica todavía son comunes los enfoques estructuralistas, más rígidos y unidireccionados; o los enfoques mecanicistas, que pierden la visión de conjunto y cierran puertas ante las posibilidades que ofrecería un método sinérgico y adaptable de experimentación. Estas contradicciones y anacronismos son incluso frecuentes en el ámbito universitario, debido en parte a una tradición que proviene de las ciencias físicas, por lo general sometidas a menores grados de incertidumbre; en parte debido al celo con que los “científicos” de algún área en particular tienden a mirar a los de las demás áreas. En parte porque la ciencia es marginalmente libertaria y creativa; pues, por paradójico que nos parezca, predomina en ella un espíritu lento, codificado y conservador.

Dado que no es este el espacio para desarrollar el concepto más contemporáneo del método científico, quizá sí sea útil comentar brevemente los momentos que pueden determinar la trayectoria más probable de un programa de medición. A este propósito, y centrados en el esquema de la Tabla 1.4, digamos lo siguiente:

**1. Formulación de los objetivos de medición:**

En ella se definen los propósitos concretos del programa de medición, encaminados a encontrar soluciones al problema central de la investigación.

**2. Prediseño del plan de mediciones:**

Se definen opciones del sistema de medición, las componentes del mismo, las variables experimentales a controlar, los costos y el cronograma de actividades aproximados; y los requerimientos de personal, equipos y otros recursos. Estas consideraciones deben ser contrastadas con los objetivos del plan de investigación, de acuerdo con la hipótesis de trabajo.

**3. Diseño y montaje:**

En la medida en que se definen los detalles del programa de experimentación, y con base en las conclusiones que arroje el prediseño, se especifican todas las variables de las que depende la medición arriba mencionadas y se definen los requerimientos técnicos necesarios para lograr niveles aceptables de error en los resultados experimentales. Además, se ensamblan las componentes individuales de los equipos y se realizan las calibraciones necesarias de los mismos.

**4. Registro de datos:**

Se realizan unas pruebas preliminares del sistema de medición con el fin de identificar posibles inconvenientes en su funcionamiento; eventualmente puede suceder que se deba revisar las consideraciones de diseño del sistema para ajustarlo. Cuando todo opere a satisfacción, se da inicio al programa de toma, registro y almacenamiento de datos.

**5. Cálculos experimentales:**

Consiste en la transformación de la información de acuerdo con objetivos específicos de cálculo. En consecuencia, el registro de datos y los cálculos pueden realizarse simultáneamente para ganar control y confianza sobre el equipo de medición y el programa de experimentación.

**6. Análisis y reporte de datos:**

Los resultados experimentales se contrastan sistemáticamente con las hipótesis de la investigación. Es el momento de analizar y llegar a conclusiones que respondan a los objetivos del trabajo.

**7. Reanudación de pruebas:**

Surge aquí la pregunta de si los resultados están en consonancia con los objetivos planteados. Si la respuesta es negativa habrá que evaluar y reconsiderar el plan de estipulado.

Aunque este esquema es muy simplificado, en términos generales admite su adaptación y desarrollo en circunstancias específicas. Por ejemplo, un ensayo docente tiene objetivos muy diferentes a los de una prueba estandarizada de laboratorio y al de un proyecto de investigación: tal vez en este último caso el programa de experimentación requiera ser desarrollado de un modo más completo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abbagnano, Nicola. *Diccionario de Filosofía*. Fondo de Cultura Económica. 3ª edición. 1998.
- Ferrater Mora, J. *Diccionario de Filosofía*. Ed. Ariel. Barcelona. 1999.
- Bergson, H. *Materia y memoria. Ensayo sobre la relación del cuerpo con el espíritu*. Editorial Cactus. 2006.
- Bergson, H. *El pensamiento y lo moviente*. Espasa-Calpe. 1976.
- Bullock, R. y R. Deckro. *Foundations for system measurement*. *Measurement*, 39 (2006) 701-709.
- Ferris, T. *A new definition of measurement*. *Measurement*, 36 (2004) 101-109.
- Finkelstein, L. *Widely, strongly and weakly defined measurement*. *Measurement*, 34 (1) (2003) 39-48.
- Finkelstein, L. *Problems of Measurement in soft systems*. *Measurement*, 38 (2005) 267-274.
- Mari, L. *Epistemology of measurement*. *Measurement*, 34 (2003) 17-30.
- Mari, L. *The problem of foundations of measurement*. *Measurement*, 38 (2005) 259-266.
- Michell, J. *The logic of measurement: A realistic overview*. *Measurement*, 38 (2005) 285-294.
- Rossi, G. *Measurability*. *Measurement*, 40 (2007) 545-562.
- Serres, M. (ed.). *Historia de las ciencias*. Ediciones Cátedra. Madrid. 1991.

## CAPÍTULO 2

# TEORÍA DEL ERROR

El trabajo técnico y científico se realiza con base en información que proviene de fuentes diversas, más o menos confiables, y produce valores estimados cuya validez está determinada tanto por la calidad de la información utilizada como por el manejo que se haga de la misma. En consecuencia, un propósito fundamental en el tratamiento de datos experimentales es no sólo calcular los valores numéricos de ciertas magnitudes sino también hallar índices de confiabilidad que respalden esos resultados, a fin de poderlos usar, probar, contrastar, entre otras operaciones que hacen parte del ejercicio diario del experimentador. Quién trabaja con datos experimentales, de campo o de laboratorio, a tal punto está obligado a presentar un buen análisis de estimación y confiabilidad de la información, que su idoneidad técnica debería suponer, por principio, un manejo básico de la teoría del error. En cierta forma este libro está dedicado a presentar y desarrollar los elementos operativos de esta teoría; y, más concretamente, este capítulo está orientado a conceptualizar los errores experimentales y analizar los factores que afectan su magnitud.

### 2.1. EL ERROR EXPERIMENTAL

Para empezar, podría decirse que el *error total*  $\Delta X$  asociado con el dato  $X_i$  de la magnitud genérica  $X$  corresponde a la diferencia numérica entre el dato y, digamos, un valor “correcto” de la magnitud,  $VR$ , esto es:

$$\Delta X = X_i - VR \quad (2.1)$$

Por supuesto, en algunos casos el error puede ser considerado simplemente una equivocación, como si se dijera “hay tres papayas en el frutero” cuando en realidad hay sólo dos, y el conteo estuvo mal hecho; es claro que aquí el dato es  $X_i = 3$  mientras que la cantidad correcta es  $VR = 2$ , para un error  $\Delta X = 1$ . Desafortunadamente no siempre es tan fácil contar, a pesar de que las cantidades sigan siendo números enteros. Y para ver esto baste considerar el siguiente par de ejemplos: ¿cuántas parejas bailan en la pista? ¿cuántas estrellas distingues en el cielo? Si en estos casos el error puede seguir tratándose como equivocación por lo menos habrá que admitir que la movilidad de los bailarines y el entrar o salir de algunos de ellos de la pista pueden complicar el conteo; y algo parecido ocurre con los astros que titilan en la bóveda celeste, que en ocasiones se destacan con plena claridad y otras desaparecen, cuando no es que son francamente demasiados para ser numerados.

Un poco más complejo es el análisis de error cuando las magnitudes de interés no pueden considerarse cantidades enteras sino números reales. Bajo estas condiciones,



y prácticamente sin ninguna excepción, resulta inevitable que el error total en un dato sea diferente de cero: medidas de masa, fuerzas, longitudes, temperaturas, voltajes, etc., los ejemplos abundan. Tomemos un caso: supóngase que se quiere determinar la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ . No hay razones de peso para poner en duda que esta magnitud física varíe con el tiempo, de hecho se considera una constante universal y se usa desde 1983 para definir la medida patrón de longitud (*metro*); lo que sí ocurre es que los valores estimados de la velocidad de la luz han cambiado a lo largo del tiempo y, con ello los errores totales asociados con cada uno de esos valores. Antes del siglo XVII se creía que la luz se propagaba a través del espacio instantáneamente, hasta que Galileo propuso medir, mediante un juego de linternas, el tiempo que se tomaba un rayo de luz en recorrer una distancia conocida de unas pocas millas. Aunque no está comprobado que Galileo o sus discípulos realizaran este experimento, sí está claro que con la tecnología de la época habría sido imposible detectar por este método un tiempo de viaje del rayo diferente de cero, que sirviera por lo menos para poner en cuestión el carácter instantáneo de la propagación de la luz. La primera estimación cuantitativa de esta magnitud física la realizó Olaus Roemer en el año 1676, quien estaba estudiando con su telescopio los movimientos de la luna *Io* alrededor del planeta Júpiter. Roemer estimó en 42.5 horas el tiempo que tomaba *Io* para dar una revolución en torno a Júpiter cuando la distancia entre este y la Tierra era la mínima (punto H en el diagrama de la derecha, original de Roemer). También observó que cuando estos dos planetas se alejaban entre sí (desde L hasta K, por ejemplo) el tiempo que demoraba el satélite en aparecer detrás de Júpiter se iba haciendo progresivamente más largo, y que esta tendencia se invertía cuando la Tierra se acercaba, en el trayecto de F a G, por ejemplo. Finalmente concluyó que la variabilidad observada en el tiempo dependía de la distancia entre los dos planetas, dado que la velocidad de la luz era finita, y obtuvo valores numéricos con los cuales dicha velocidad se pudo estimar en unos 214,000 km.s<sup>-1</sup>, cantidad que difiere en casi 30% de la actualmente aceptada.

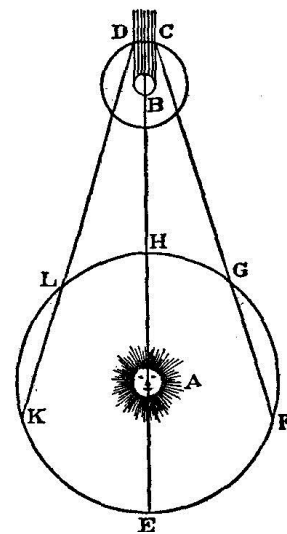


Figura 2.1

La tabla 2.1 muestra algunos resultados históricos de la estimación de  $c$  (Froome y Essen, 1969). Los primeros datos, correspondientes a métodos de estimación muy distintos entre sí, no incluyen la magnitud del error, debido, entre otras cosas, a la poca información disponible acerca del control experimental que entonces se tenía sobre las variables involucradas en los cálculos. Los cálculos históricos reportados en la tabla pueden dar una idea de cómo la actividad creativa se volcó desde el principio a explorar diferentes técnicas experimentales. A la par, los valores reportados de  $c$  tienden a converger a un valor cercano a 299,792 km.s<sup>-1</sup> mientras los errores asociados van disminuyendo progresivamente. En su momento Roemer no contaba con más referencia que la antigua creencia en que la propagación de la luz era instantánea o los intentos fallidos de Galileo para hallar un término finito para esta velocidad; en cambio Bradley, Fizeau y demás experimentadores seguramente conocieron los cálculos de Roemer y demás antecedentes.

Volvamos entonces al propósito inicial de medir la velocidad de la luz en el vacío. El empeño puesto en la medición es el máximo, los equipos están bien calibrados, todo está listo para lograr la mejor de las mediciones posible y, finalmente, el resultado es  $c_i$ . Ahora viene la pregunta: ¿cuál es el error asociado a este valor? O, mejor aún: ¿cómo hallar el valor correcto  $VR$  necesario para calcular  $\Delta c$ ? Es evidente que

nuestro actual valor de referencia será el adoptado en el año 1983, el cual, sin embargo, no es todavía el “correcto” sino apenas el mejor valor estimado. Y a menos que las técnicas de nuestro experimento pudieran garantizar una mayor precisión en los resultados que el de este valor de referencia, el error total en el experimento realizado será:  $\Delta c \approx c_i - 299,792.458 \text{ km.s}^{-1}$ . Observe que este  $\Delta c$  no es un valor exacto sino una aproximación al error, algo así como un orden de magnitud. No podría ser de otro modo debido a que la magnitud que se quiere determinar remite a un número real, y no a un entero.

Tabla 2.1. Valores estimados de la velocidad de la luz en el vacío (Froome & Essen, 1969)

<b>Año</b>	<b>Autor</b>	<b>Método</b>	<b>Valor estimado (km/s)</b>	<b>Error (km/s)</b>
1676	Olaus Roemer	Satélite de Júpiter	214,000	
1726	James Bradley	Aberración estelar	301,000	
1849	Armand Fizeau	Rueda dentada	315,000	
1862	Leon Foucault	Espejo rotante	298,000	±500
1879	Albert Michelson	Espejo rotante	299,910	±50
1907	Rosa, Dorsay	Constantes electromagnéticas	299,788	±30
1926	Albert Michelson	Espejo rotante	299,796	±4
1947	Essen, Gorden-Smith	Resonador de cavidad	299,792	±3
1958	K. D. Froome	Radio Interferómetro	299,792.5	±0.1
1973	Evanson et al	Láser	299,792.4574	±0.001
1983		Valor adoptado actualmente	299,792.458	±0.001

Por otra parte, hay casos en los cuales no existe una constante física que sirva de trasfondo a un cierto experimento, sino que los datos remiten a sus propios valores de referencia o los suponen. Pensemos, por ejemplo, en un resorte lineal que se produce para hacer parte del sistema de retorno de alguna máquina, de modo que su constante elástica  $E$ , la cual determina la relación fuerza y deformación, debe ajustarse a un valor nominal o de referencia,  $VR$ . Bajo estas circunstancias, el error  $\Delta E$  mide la desviación efectiva entre cualquier dato particular  $E_i$  y el nominal, previamente determinado.

Finalmente, el valor de referencia de un conjunto de datos puede ser meramente estadístico. Para explicarlo supongamos un experimento de naturaleza aleatoria como, por ejemplo, el lanzamiento repetido de una moneda al aire y el conteo del número de caras y de sellos. Si la moneda es la misma y no está cargada, y si los lanzamientos son independientes entre sí, esperamos que el número de caras sea del mismo orden que el de los sellos, por lo cual el valor estadístico de referencia será el de  $N/2$  caras (o sellos), con  $N$  el número total de lanzamientos. En tal caso, si en el lanzamiento  $N$  el número acumulado de caras fuera  $X_i$ , entonces el error correspondiente a la variable “número de caras” se calcularía como la diferencia entre  $X_i$  y  $N/2$ . Observe nuevamente que aquí el valor  $VR$  no es propiamente lo que denominaríamos “correcto” o “verdadero”, sino más bien el número de caras “más probable”.

## 2.2. LAS COMPONENTES DEL ERROR

Ahora bien, se acostumbra dividir la magnitud del error total en la componente del error sistemático y la del aleatorio, y tratar ambas como si fueran mutuamente independientes. Para verlo más claramente, reescribamos la expresión (2.1)

$$\Delta X_i = (X_i - \tilde{X}) + (\tilde{X} - VR) \quad (2.2)$$

El *error sistemático* o de *sesgo*, que se calcula como la diferencia entre el mejor valor estimado de la variable,  $\tilde{X}$ , y el valor de referencia  $VR$  se supone que se puede someter a un determinado control, y se expresa como:

$$\beta = \tilde{X} - VR \quad (2.3)$$

Este error  $\beta$  depende principalmente del nivel de resolución y del estado de calibración de los instrumentos de medida, y de los procedimientos experimentales; pero también puede provenir de la acumulación de errores por redondeo numérico o por la introducción de errores a través de la aplicación de modelos numéricos, físicos o matemáticos, sobre todo cuando se trata de estimar de manera indirecta una cantidad, es decir, sin medirla. Por consiguiente, las más de las veces, el error  $\beta$  es susceptible de algún control durante la ejecución de los programas experimentales.

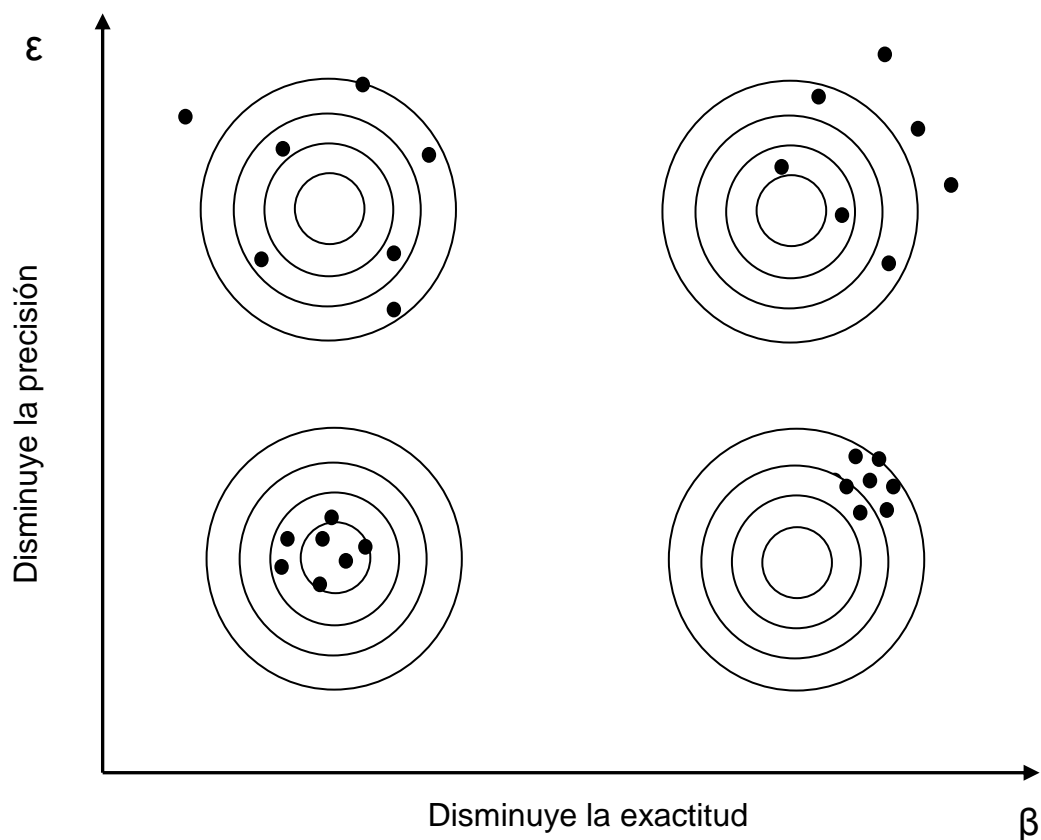


Figura 2.2. Esquema gráfico de los conceptos de precisión y exactitud en las medidas.

Por otro lado, la repetición de un experimento en condiciones similares pone de presente las diferencias que a menudo aparecen entre mediciones distintas de una misma magnitud. Esto normalmente ocurre porque la cantidad medida está asociada a una cierta función de distribución de probabilidad, de modo que a la diferencia entre un valor  $X_i$  medido y el valor estimado de la serie,  $\tilde{X}$ , lo consideramos el *error aleatorio* o *de precisión*, y lo denotamos como:

$$\varepsilon_i = X_i - \tilde{X} \quad (2.4)$$

Por supuesto, dado que, en principio,  $\varepsilon_i$  obedece a una distribución de probabilidad asociada a la naturaleza de la magnitud que se quiere medir, entonces su valor generalmente escapa al control experimental.

En suma, el error  $\Delta X_i$  correspondiente a la medición  $X_i$  de la magnitud cuyo valor de referencia es  $VR$ , puede escribirse como:

$$\Delta X_i = X_i - VR = \sqrt{\varepsilon_i^2 + \beta^2} \quad (2.5)$$

Observe cómo esta fórmula difiere ligeramente de la ecuación 2.2, pues aquí el error total es más bien la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos son los errores de sesgo y de precisión (la distancia de cada punto respecto del centro de la diana en la figura 2.2), más bien que la suma de las dos componentes del error.

En conclusión, el cuidado con el que se diseñe un programa experimental, la habilidad para encontrar el momento propicio de una medición, el nivel tecnológico de los instrumentos de medida y la experiencia y destreza de quienes miden, a menudo sólo alcanzan a afectar la magnitud de los errores asociados con un experimento determinado, sin lograrlos reducir completamente.

### 2.3 SISTEMAS DE UNIDADES DE MEDIDA

Un sistema de unidades de medida es un conjunto de patrones de medición confiables y adecuadamente definidos, que sirven para satisfacer los requerimientos de medición. El primer sistema de unidades se desarrolló en Francia en el siglo XVIII, y se denominó *Sistema Métrico*. Posteriormente se desarrollaron otros sistemas de medida y cada vez fue más difícil encontrar las equivalencias entre unos y otros, ante lo cual fue necesario designar un Comité Consultivo de Unidades con el encargo de definir un sistema único internacional. Este Comité analizó los sistemas existentes y adoptó uno cuyas unidades básicas eran el metro, el kilogramo y el segundo, denominado *Sistema MKS*. Posteriormente, en 1960, la XI Conferencia General de Pesos y Medidas adoptó el llamado *Sistema Internacional de Unidades* (SI), que corresponde a una versión ligeramente modificada del MKS (González y Zéleny, 1995).

El sistema SI define siete unidades básicas, más dos unidades suplementarias (Tabla 2.2). Las demás unidades del SI se derivan de la combinación de estas nueve. Por ejemplo, la unidad de fuerza en el SI se denomina Newton (N), y se define como:

$$1N = 1 \frac{kg.m}{s^2}$$

Tabla 2.2. Unidades fundamentales del sistema SI

Unidades básicas			
Dimensión	Unidad	Abreviatura	Símbolo
Cantidad de sustancia	Mol o mole	mol	mol
Longitud	Metro	m	L
Masa	Kilogramo	kg	M
Tiempo	Segundo	s	T
Temperatura	Kelvin	K	$\theta$
Corriente eléctrica	Ampere	A	I
Intensidad luminosa	Candela	cd	J
Unidades suplementarias			
Angulo plano	Radian	rad	
Angulo sólido	Steradian	sr	

Y si se quiere calcular la temperatura en grados Celsius, se debe restar a su valor en Kelvin una constante. Esto es:

$$^{\circ}\text{C} = K - 273.15$$

Además, en el SI los múltiplos y submúltiplos se deben expresar con base en un sistema decimal de prefijos que se detalla en la Tabla 2.3.

En suma, son diez las magnitudes con las que, según se ha comprobado, se producen el resto de las magnitudes de interés para las ciencias físicas. En cierto sentido sorprende que sean tan pocas, pero no sorprende menos constatar cuánta naturaleza se conoce a partir de esas magnitudes fundamentales.

Tabla 2.3 Prefijos para las unidades SI

Factor multiplicador	Prefijo	
	Nombre	Símbolo
$10^{18}$	exa	E
$10^{15}$	peta	P
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	hecto	h
10	deca	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a

Ahora bien, en ingeniería es de uso común el *Sistema inglés* de medida. Las unidades patrón son: el *pie* para la longitud, el *slug* para la masa, el *segundo* para el tiempo y el grado Ranking ( $^{\circ}\text{R}$ ) para la temperatura. En este sistema la unidad de fuerza se denomina libra (lb), que se deriva de las anteriores. Es decir, si por la segunda ley de Newton la fuerza es igual a la masa por la aceleración, entonces 1 lb se define como la

fuerza que experimenta una masa de 1 slug cuando se acelera 1 pie/s<sup>2</sup>.

Por consiguiente, el peso de un cuerpo ( $W$ ) se calcula como el producto entre la masa (en slug) por la aceleración de la gravedad:  $W = mg$ , donde  $g = 32.2 \text{ pie} / \text{s}^2$ . La Tabla 2.4 resume las principales equivalencias entre los sistemas SI y el inglés.

Tabla 2.4. Equivalencias entre las unidades SI y las unidades inglesas

Magnitud	Unidad patrón en el sistema inglés		Equivalencia en el sistema SI
Longitud	pie	=	0.3048 m
Masa	slug	=	14.5938 kg
Fuerza	lb	=	4.4482 N
Temperatura	°R	=	9/5 K

Es también de uso común en la literatura anglosajona hacer referencia a la temperatura con base en la escala Fahrenheit (°F). En tal caso la conversión a Kelvin (K) es la siguiente:

$$T(K) = \frac{5}{9}(T(^{\circ}F) + 459.67)$$

Finalmente, señalemos algunas recomendaciones para el uso correcto de las unidades SI:

- Un símbolo nunca se escribe en plural.
- Los símbolos se escriben en minúsculas. Hay dos excepciones a la regla: los prefijos mega (M), giga (G) y tera (T), peta (P) y exa (E); y los símbolos que llevan el nombre de alguna persona, por ejemplo: Newton (N), Pascal (PA), etc.
- Las unidades que se definen en términos de algunas otras se separan por un punto. Por ejemplo: 1N=kg.m.s<sup>2</sup>. Por consiguiente m.s designa metro-segundo, mientras ms designa mili-segundo.
- El exponente de una unidad que tiene prefijo opera sobre la unidad con el prefijo. Es decir: mm<sup>2</sup>=mm.mm.
- No se acepta el uso de prefijos compuestos. En vez de escribir kmm (kilo-mili-metro) se escribe m (metro).

## 2.4 CÁLCULOS NUMÉRICOS

El reporte de los cálculos debe estar en correspondencia con la exactitud de la información que se utiliza. Aunque más adelante volveremos a tratar este tema, tenga en cuenta las siguientes observaciones al respecto.

### Cifras significativas

Por lo general, el error de un cálculo no puede ser menor que el mayor de los errores de los datos utilizados en la operación. No importa cuantos dígitos reporte una calculadora, debemos estar seguros de que los dígitos sean confiables y consistentes con el grado de exactitud de la información utilizada; a estos dígitos se les llama las *cifras significativas* del dato. Por ejemplo, los números 384 y 2.45 tienen ambos 3 cifras significativas, de las cuales el dígito ubicado en el extremo derecho retiene el mayor grado de incertidumbre. Cuando el número incluye uno o más ceros a la derecha o la izquierda puede presentarse cierta confusión, razón por la cual habrá que tener cierto cuidado. Un número como 100 aparece como si tuviera 3 cifras

significativas, pero si apenas tenemos cierta confianza en el valor del centenar, resulta más adecuado expresar el número con base en la *notación científica*, es decir:  $1(10^2)$ . A veces, sin embargo, sobre todo para efectos del uso de los prefijos, es más conveniente el uso de la *notación de ingeniería*, que expresa los exponentes de la base 10 como múltiplos de 3. Según esta notación el número 100 con una cifra significativa se escribe  $0,1(10^3)$ , mientras los números 3450 y 0.00185 se escriben  $3.45(10^3)$  y  $1.85(10^{-3})$  respectivamente.

### **Redondeo numérico**

Puesto que el número de cifras significativas de un dato puede ser menor que el número de dígitos que se obtiene a partir del uso de una máquina de cálculo, es necesario tener claras las reglas para el redondeo de los dígitos reportados. Para redondear un número cualquiera a  $n$  cifras significativas, las reglas son las siguientes:

- Si la cifra  $n+1$  es menor que 5, ella y las que le siguen a la derecha desaparecen. Según esto, los números 0.453 y 76.156 redondeados a 2 cifras significativas se escriben como 0.45 y 76 respectivamente.
- Si la cifra  $n+1$  es mayor o igual a 5 y tiene algún valor diferente de cero a su derecha, se aumenta en 1 el valor del dígito  $n$ . Los números 0.876802 y 657.541 con tres cifras significativas se escriben como 0.877 y 658.
- Si la cifra  $n+1$  es igual a 5 y está seguida de ceros a su derecha, redondee el dígito  $n$  al valor par que le sigue. Es decir, los números 3455 y 0.9875 se redondean a tres cifras significativas como 3460 y 0.988 respectivamente.

### **2.5 SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

La mejor manera de aprender en ingeniería es mediante la solución de problemas. Dado que esta es una práctica común, conviene que el estudiante desarrolle no sólo habilidades específicas de cálculo sino procedimientos adecuados para la solución de estos problemas. Debe recordarse que la lectura de los textos no es suficiente para apropiarse de los conceptos; los conceptos deben ser explorados por el entendimiento para que muestren sus campos de aplicación y sus limitaciones. A continuación presentamos algunas guías prácticas, útiles en la solución de problemas aplicados a la ingeniería.

1. Tome papel, lápiz y calculadora. No se aprende imaginando las soluciones. Hay que rayar, ponderar y combinar opciones de solución.
2. Lea atentamente el enunciado del problema y trate de relacionar la situación planteada con el tema de estudio. A veces es útil intentar otras palabras para expresar el problema.
3. Aprenda y utilice técnicas de análisis adecuadas para plantear y resolver problemas (como dibujos, esquemas, diagramas de flujo, etc.), sobre todo aquellas con las cuales usted se sienta más cómodo.
4. Identifique todos los datos e incógnitas del problema. Relacione las variables en forma funcional.
5. Verifique la homogeneidad dimensional de los términos en las ecuaciones resultantes. Confirme que el número de ecuaciones sea igual al de las incógnitas y que las ecuaciones no sean redundantes, de lo contrario no hay solución posible del sistema.
6. Considere los resultados de los cálculos desde el punto de vista de la lógica y el sentido común. Cuando crea que ha encontrado la respuesta, revise todos los procedimientos y estudie la posibilidad de hallar otras vías de solución.
7. Los resultados deben presentarse con tantas cifras significativas como lo permita la precisión de los datos del problema.

Sea ordenado y cuidadoso en los procedimientos, por lo general esto resulta estimulante para el estudio. Si además su disposición de ánimo es alegre, relajada y atenta, usted encontrará más gratos los frutos del trabajo. No sobra decir que en muchas ocasiones ocurren bloqueos mentales que hacen más difícil el estudio; si es este el caso, intente identificar qué es lo que le molesta o incomoda, considere esto como parte de los problemas prácticos inmediatos que requiere entender y resolver.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

En los problemas siguientes tome  $V$  o  $\vec{V}$  velocidades,  $\mu$  viscosidad dinámica,  $\nu$  viscosidad cinemática,  $g$  aceleración de la gravedad,  $\rho$  densidad de masa.

1. En una oficina de correo hay dos balanzas para pesar la correspondencia. Tomando un peso conocido de 10 g se realizaron las siguientes mediciones para verificar la confiabilidad de las balanzas.

Lectura	Balanza A (gr)	Balanza B (gr)
1	7.2	10.4
2	7.0	9.8
3	6.8	9.6
4	7.1	10.2
5	6.9	10.2
6	6.9	10.3
7	7.0	9.7
8	7.2	10.1
9	7.0	10.4
10	6.9	9.5

- ¿Cuál de las dos balanzas usaría usted en lo sucesivo para pesar las cartas? ¿Por qué? Explique.
2. Encuentre las dimensiones de una frecuencia angular y de una frecuencia de oscilación.
3. Si  $kT$  es una energía cinética, encuentre las unidades de  $[k]$ .
4. En la ecuación de estado del gas ideal,  $pV = nRT$ , encuentre las unidades de  $[R]$ .

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beers, Y. *Introduction to the theory of error*. Second edition. Addison-Wesley comp. 1957.

Benjamín, J.R. and C. Allin Cornell. *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*. McGraw-Hill. USA, 1970.

Chapra, S. Y R. Canale. *Métodos numéricos para ingenieros*. Cuarta edición. McGraw-Hill. 2002.

Coleman, H. y G. Steele. *Experimentation and uncertainty analysis for engineers*. John Wiley and sons. 1989.



- Daniels, F. et al. *Experimental Physical Chemistry*. Sixth edition. McGraw-Hill. 1962.
- Froome, K.D. y L. Essen. *The Velocity of Light and Radio Waves*. Academic Press, London. 1969.
- González, C y R. Zeleny. *Metrología*. McGraw Hill. México, 1995.
- Journal of Petroleum Technology. Sep. 1982. p.2019-2055.
- Hibbeler, H. *Engineering Mechanics - statics and dynamics*. Séptima edición. Prentice-Hall. 1995.
- Mandel, J. *The Statistical Analysis of Experimental Data*. Dover Publ. New York, 1964.
- Meyer, P. *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. Fondo Educativo Interamericano, S.A. México, 1973.
- Naranjo, J.A. y J.F. Jiménez. *Errores y ajustes*. Universidad Nacional de Colombia. 1990.
- Ryan, T.P. *Modern Regression Methods*. John Wiley and sons. USA, 1997.
- Spiegel, M. *Estadística*. McGraw-Hill. México, 1970.
- Taylor, J. *An introduction to Error Analysis*. Second edition. University science books. Sausalito, CA. 1997.
- Walpole, R.E. y R.H. Myers. *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Nueva Editorial Latinoamericana. México, 1978.

## CAPÍTULO 3

# ERRORES ALEATORIOS DE UNA VARIABLE SINGULAR

Hemos visto cómo los errores de precisión son en buena medida inevitables, puesto que dependen de la naturaleza de las magnitudes experimentales objeto de la medición y de los “ruidos” que producen los mismos procedimientos de medida, asociados más a los aparatos, instrumentos y experimentadores; por el contrario, los errores sistemáticos pueden ser hasta cierto punto controlados. En general, el experimentador busca evitar al máximo la introducción de ruidos aleatorios en la medición, pero, sobre todo, está interesado en estimar la magnitud y distribución de los errores aleatorios asociados a las muestras de datos mediante técnicas estadísticas apropiadas.

En este capítulo haremos una presentación de los procedimientos básicos para el tratamiento del error aleatorio de una variable singular. Por supuesto, dado que entre los objetivos de este texto no está ahondar en la teoría de error, invitamos al lector interesado en estos temas para que consulte libros más especializados sobre el particular, donde encontrará técnicas específicas, útiles en algunas situaciones que así lo ameriten.

### 3.1. POBLACIÓN Y MUESTRA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Consideremos la situación siguiente: se tienen 12 monedas de la misma denominación y condiciones (no hay monedas abolladas, cargadas, etcétera), las cuales se lanzan sobre una mesa, y luego se cuenta el número total de caras obtenidas. El análisis de este experimento (aparentemente simple) permite identificar en él rasgos característicos muy interesantes. En primer lugar, la repetición del lanzamiento puede arrojar resultados que son variables e impredecibles, a pesar de que los procedimientos de ejecución pueden ser prácticamente los mismos; además, el resultado de cada lanzamiento será siempre un número entero que fluctúa en un rango de valores muy preciso: 0, 1, 2, ..., 12.

Por supuesto, este experimento se puede repetir varias veces, digamos 10 o 100 o 1000 veces, y habrá ocasiones en que se obtenga el mismo resultado concreto; por ejemplo: caen 9 caras. Veamos ahora lo que ocurre si se proyectan los resultados sobre un diagrama donde las abscisas representan el número  $n(X)$  de caras obtenido (desde 0 hasta 12), y las ordenadas corresponden a la frecuencia relativa con la que se presenta cada resultado específico, la cual se define por medio de la siguiente fórmula

$$fr(X) = \frac{\text{Número de veces que caen } X \text{ caras}}{\text{Número de veces que se repite el experimento}} = \frac{n(X)}{N}, \quad 0 \leq fr(X) \leq 1 \quad (3.1)$$

De paso, nótese que la suma de las frecuencias relativas asignables a todos los valores  $X$  debe ser igual a la unidad, pues la suma de los  $n(x)$  es igual al número total de veces que se repite el experimento,  $N$ .

La figura 3-1 contrasta los resultados para  $N=30$  y  $N=100$  datos del experimento en cuestión y muestra algunas características particulares de la distribución de frecuencias; resaltemos el aspecto irregular del diagrama correspondiente a un número menor de datos ( $N=30$ ) y la variabilidad más suave para el número mayor ( $N=100$ ). Este resultado no parece casual: a medida que crece  $N$  se observa que la función de las frecuencias relativas tiene un máximo absoluto cercano a  $X=6$ , cada vez más estable a medida que  $N$  aumenta; además, la distribución de las frecuencias tiende a ser simétrica en torno a dicho máximo absoluto, de modo que, en el caso concreto que nos ocupa, la suma de las frecuencias relativas acumuladas entre  $X=0$  y  $X=6$  es aproximadamente igual a la suma entre  $x=6$  y  $X=12$ .

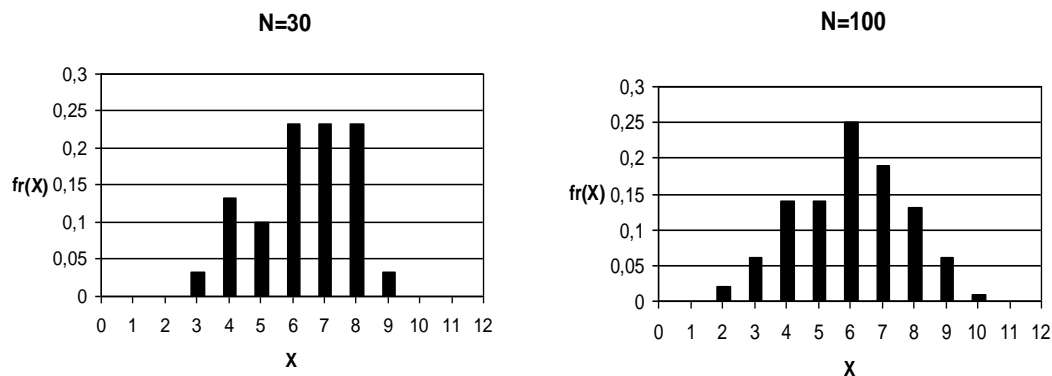


Fig. 3.1. Diagramas de frecuencia relativa para el lanzamiento de 12 monedas

Mientras se mantengan las condiciones que determinan la realización del experimento, será forzoso admitir que el aspecto de estos diagramas es función del número de datos, y que se hace más estable en la medida en que la información disponible crece. En el límite, cuando  $N$  tienda a infinito, la disponibilidad de información acerca del experimento será perfecta.

En adelante se llamará *población* al conjunto de todas las realizaciones posibles de un experimento, y se entenderá que una *muestra de la población* es cualquier subconjunto de esas realizaciones que definen la población correspondiente. Según esto, si el número de lanzamientos posibles de las 12 monedas en el ejemplo anterior fuera infinito o indefinido, el tamaño de la población sería en consecuencia infinito o indefinido; en tal caso, los resultados obtenidos con  $N=30$  lanzamientos conformarían una muestra de datos, como también los datos correspondientes a  $N=100$  lanzamientos. En cambio, si se tratara de establecer el peso de las personas que habitan en un edificio de apartamentos en un momento determinado, sólo midiendo el peso de todas las personas tendríamos los datos de la población, y si midiéramos el peso de algunas personas tendríamos una muestra. Por supuesto, en la medida en que los datos de la muestra se aproximen a los de la población, la información permitirá hacer un análisis más confiable y detallado de las características del experimento. Observe, además, que la definición de población y muestra no se aplican exclusivamente a resultados experimentales numéricos o cuantitativos, sino también a

eventos cualitativos con resultados del tipo: cara/sello, fuerte/moderado/débil, etcétera.

Pero el experimento del lanzamiento de monedas o el del registro de peso de las personas del edificio son sólo algunos entre una muy amplia variedad de experimentos llamados aleatorios, de modo que muchas de las propiedades mencionadas en esos ejemplos son únicamente válidas para las condiciones específicas señaladas. En términos generales, los rasgos más característicos de los *experimentos aleatorios* son:

- Cada experimento se puede repetir indefinidamente sin alterar las condiciones básicas de realización.
- Se requiere tener una noción clara, así sea descriptiva, de la población de cada experimento. Esto, a su vez, implica establecer cuáles son los procedimientos de realización y las señales particulares que interesa analizar en cada experimento.
- Los resultados particulares de un experimento aleatorio son inciertos; esto es, no hay manera de preverlos con exactitud; sin embargo, la disponibilidad de información facilita la descripción del mismo. En el caso de los experimentos llamados “estacionarios”, sus propiedades no varían con el tiempo.

En lo que sigue de este capítulo se presentarán algunos conceptos y técnicas estadísticas básicas para el tratamiento de los errores aleatorios asociados a una muestra de datos experimentales.

### 3.2. ESPACIO MUESTRAL Y VARIABLES ALEATORIAS

El *espacio muestral* se define como el conjunto de todos los resultados distintos posibles de un experimento aleatorio, sean estos numéricos o no. Consideremos los siguientes ejemplos, donde llamamos  $E_i$  a un experimento aleatorio y  $\Omega_i$  al espacio muestral correspondiente:

- $E_1$ : Se lanza un dado y se anota el número que aparece en la cara superior.  
 $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $E_2$ : Se lanza una moneda tres veces y se registra la secuencia de caras (C) y sellos (S).  
 $\Omega_2 = \{CCC,CCS,CSS,SSS,SSC,SCC\}$
- $E_3$ : Se fabrica un cierto tipo de micro-componentes electrónicos hasta obtener 10 que sean no defectuosos. Se cuenta el número total de micro-componentes producidos.  
 $\Omega_3 = \{10,11,12,\dots\}$
- $E_4$ : Se introduce un medidor de velocidad puntual en un flujo, y se miden las tres componentes espaciales de la velocidad para un sistema de referencia cartesiano.  
 $\Omega_4 = \{(u,v,w)/(u,v,w) \text{ son las componentes cartesianas del vector velocidad en el punto, y sus valores corresponden a números reales}\}$
- $E_5$ : Un pluviómetro mide la cantidad de lluvia diaria que cae en un lugar determinado, en milímetros. Cada día se lee el aparato y se registra el dato. Se conoce la fecha de instalación del instrumento pero no se sabe hasta cuando éste seguirá operando.  
 $\Omega_5 = \{0,1,2,3,\dots,M\}$ , donde M es la cantidad máxima de milímetros que puede caer en el lugar y ser medido por el instrumento.
- $E_6$ : Se mide el porcentaje de humedad relativa del aire en un recinto cerrado, cada minuto y por un periodo de 24 horas. Los datos se reportan en unidades porcentuales.  
 $\Omega_6 = \{0,1,2,\dots,100\}$ . Observe que si el medidor está lejos de ventanas, puertas,

fuentes de calor o cosas por el estilo, la variación de la humedad relativa puede ser una función continua en el tiempo, y continuamente derivable. En tal caso el espacio muestral puede también ser descrito de la siguiente manera:

$\Omega_6 = \{hr/hr \text{ es una función continua, derivable en el tiempo, que satisface } 0 \leq hr \leq 100, \text{ para todo } t \text{ en el intervalo de tiempo señalado}\}$

En la lista,  $E1$  tiene un espacio muestral numérico y finito; y  $E2$ , en cambio, tiene un espacio muestral finito y cualitativo, cuyos elementos corresponden a 6 secuencias distintas de caras y sellos.  $\Omega_3$ , por su parte, es un espacio infinito numerable, debido a que podemos estar considerando un proceso de fabricación tan bueno como para que los primeros 10 micro-componentes sean no defectuosos o tan deficiente como para descartar la posibilidad de fabricar 10 micro-componentes que funcionen; sea cual sea el resultado, en todo caso, éste será siempre un número entero positivo. El espacio  $\Omega_4$ , definido aquí por comprensión y no por extensión, se refiere más a un espacio muestral vectorial, infinito y no numerable, donde las componentes de la velocidad son números reales.  $E5$  censa la lluvia, una variable de interés climático relativamente compleja; en condiciones normales, se supone que la lluvia en una región corresponde a patrones estadísticos cíclicos y estacionarios, pero si operan algunos factores locales, regionales o globales, que afecten la serie de lluvia, las mediciones en el tiempo pueden también mostrar tendencias de cambio debidas, por ejemplo, a alteraciones del ciclo hidrológico. Por su parte, las características de los espacios muestrales  $E6$  y  $E4$  son bastante similares, pero, a diferencia de  $\Omega_4$ , el espacio  $\Omega_6$  es finito. En fin, observe que en la realización de los tres primeros experimentos se requiere la intervención directa del experimentador, mientras en los tres experimentos restantes el experimentador asume un papel más bien pasivo con respecto a la efectucción del evento aleatorio, aunque activo en cuanto a la medición de los resultados; o, dicho de otra forma, la velocidad en un punto de un flujo, la lluvia y la humedad relativa en un lugar, entre otros casos, pueden darse (como fenómenos) independientemente de si los estamos midiendo o no. Estos pocos ejemplos son un bosquejo de la amplia variedad de sucesos experimentales a los que nos hemos estado refiriendo.

Ahora bien, con excepción de  $E2$ , el resto de los experimentos que se acaban de listar permite asignar un valor numérico específico, único, a cada uno de los resultados que componen los espacios muestrales correspondientes. Sin embargo, en el caso del lanzamiento de la moneda tres veces, pudiéramos definir una función  $X(s)$ , donde  $s$  sería un evento particular de los que definen el espacio muestral  $\Omega_2$ , tal que, por ejemplo:

$$X(CCC)=0 \quad X(CCS)=1 \quad X(CSS)=2 \quad X(SSS)=3 \quad X(SSC)=4 \quad X(SCC)=5$$

Una función como ésta, que asigna a cada uno de los elementos del espacio muestral  $\omega \in \Omega$  un número real  $X(\omega)$ , se denomina *variable aleatoria* (fig-3.2). Para el experimento  $E2$  tuvimos que construir la variable  $X(\omega)=x$ , donde  $x$  se asignó de modo más o menos arbitrario; pero para los demás experimentos considerados arriba está claro que el mismo resultado  $\omega$  puede constituir la variable aleatoria como tal, es decir  $X(\omega)=\omega$ .

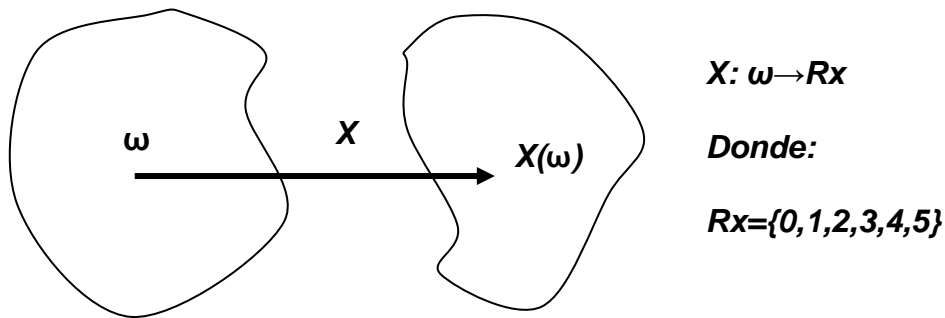


Fig. 3.2. Relación biunívoca entre los elementos del espacio muestral  $\omega \in \Omega$  y los de la variable aleatoria correspondiente,  $X(\omega)$ . Aquí  $Rx$  es el recorrido de  $X(\omega)$ .

Es importante notar cómo, en relación con un conjunto de eventos aleatorios bien determinado, se procede a definir, con la mayor claridad posible, el modo de producción de los eventos experimentales, a establecer los resultados de interés y a especificar la población, el espacio muestral y la variable aleatoria correspondientes. Del evento aleatorio real al experimento aleatorio bien definido procedemos entonces en una dirección de abstracción creciente: podrá haber fenómenos o procesos aleatorios más complejos que otros, lo cierto es que a cada uno de ellos el experimentador le trata de construir un modelo matemático que describa, según sus propios intereses, ese plano específico de realidad.

### 3.3. PROBABILIDAD Y FUNCIONES DE PROBABILIDAD

La función de frecuencia relativa nos sirvió arriba para observar el comportamiento del experimento aleatorio definido como: “lanzamiento de 12 monedas y conteo del número de caras resultante”. Puesto que los procedimientos de lanzamiento se consideraban invariantes, y se supuso que las monedas no estaban cargadas, las condiciones de realización de este experimento podrían considerarse estacionarias y la frecuencia relativa asociada a la variable aleatoria  $X = \{\omega / \omega \text{ es el número de caras}\}$  se convierte en una medida de la probabilidad de que, dado un lanzamiento cualquiera, el resultado sea un  $\omega$  particular. Note que para el experimento en cuestión se trata de una variable aleatoria discreta, con espacio muestral finito, donde la frecuencia relativa mide realmente la posibilidad de obtener un resultado cualquiera dentro del recorrido  $Rx = \{0, 1, 2, \dots, 12\}$ .

En el caso de las variables aleatorias continuas, con dominio en el campo de los números reales, la función de frecuencias relativas puede ya no ser útil. Por ejemplo, considérese una máquina de empacar harina debe llenar bolsas con 500 g cada una. En tales circunstancias cualquier muestra de datos para la masa pondrá en evidencia que, en efecto, las masas medidas estarán cerca del valor nominal estipulado (500 g), pero que rara vez el valor medido coincide exactamente con este valor nominal, lo cual resultará más evidente si la resolución de la balanza es relativamente alta. Como el espacio muestral es infinito no-numerable, será necesario definir entonces una función del tipo

$$Prob[X^- < X < X^+] = \int_{X^-}^{X^+} f(x) \cdot dx, \quad f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \quad (3.2)$$

donde  $P[X^- < X < X^+]$  cuantifica la *probabilidad* de que la variable aleatoria se encuentre

en el intervalo de valores reales definido por  $(X^-, X^+)$ . Por supuesto, para guardar las analogías con la función de las frecuencias relativas, la probabilidad correspondiente al recorrido completo de la variable aleatoria,  $R_x$ , debe ser igual a la unidad; y si, dado el caso, el dominio del recorrido es un intervalo no acotado a derecha e izquierda, entonces la integral entre  $-\infty$  y  $+\infty$  de  $f(x)$ , llamada *función de densidad de probabilidad* de la variable aleatoria, también debe ser igual a la unidad.

Ahora bien, no se debe olvidar que estamos interesados en describir la distribución de probabilidad de los errores asociados con variables aleatorias de naturaleza experimental. Sin duda alguna la gran diversidad de estas variables se corresponde con una variedad no pequeña de las distribuciones de frecuencias relativas (variables discretas) y de funciones de densidad de probabilidad (variables continuas), razón por la cual el análisis de estos comportamientos es objeto de estudio de libros especializados en estas materias. Por lo pronto supondremos que los errores aleatorios se distribuyen simétricamente a lado y lado del mejor valor estimado de la variable,  $\tilde{X}$  (cf. Capítulo 2); y llamaremos *límite de precisión*,  $P_x$ , al error asociado a una muestra homogénea de datos de  $X$ , que depende a su vez de la confiabilidad atribuible al cálculo del error de precisión. Dicho de otro modo, el *intervalo de confianza*  $\tilde{X} \pm P_x$  correspondiente a una *confiabilidad*,  $C$ , queda implícitamente definido para una variable discreta a partir de la expresión:

$$\text{Prob}[\tilde{X} - P_x < X < \tilde{X} + P_x] = \sum_{\tilde{X}-P_x}^{\tilde{X}+P_x} \text{frec.rel}(X_i) = C \quad (3.3)$$

Y para una variable aleatoria continua

$$\text{Prob}[\tilde{X} - P_x < X < \tilde{X} + P_x] = \int_{\tilde{X}-P_x}^{\tilde{X}+P_x} f(x) \cdot dx = C \quad (3.4)$$

En la mayoría de los procedimientos de cálculo se asume para los límites de precisión una confiabilidad del 95%. Pero en determinadas circunstancias los errores de precisión deben corresponder a otro tipo de requerimientos. Por ejemplo, en caso de que estemos interesados en reportar la falla de un paracaídas, entendida ésta como el evento en el cual algún dispositivo del sistema no funcione correctamente, es evidente que la confiabilidad del 95% es inaceptable, pues el equipo no brindaría condiciones de seguridad suficientes: ¡en 100 lanzamientos el paracaidista se dispondría a morir 5 veces!

### 3.4. DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA PARA LOS DATOS EXPERIMENTALES

A menudo se desconoce el tipo de función de distribución de probabilidad propia de la variable experimental de interés, por lo cual se acostumbra asumir que las frecuencias relativas para la variable discreta o las funciones de densidad de probabilidad para las variables continuas corresponden a distribuciones que tienen un valor máximo absoluto en torno al cual se distribuye la probabilidad simétricamente. Entre este grupo de funciones de distribución más utilizadas son la de Gauss (normal) y t-Student.

Empecemos por la distribución de Gauss. En este caso la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria (continua)  $X$  se define como

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad (3.5)$$

Puede verse cómo esta función se expresa en términos de dos parámetros de la población de la variable X, bajo el supuesto de que la muestra de datos disponible es infinita. El primero de estos parámetros es el *valor medio de la población*,

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_i \quad (3.6)$$

que corresponde al valor máximo absoluto de la función f(x), como se muestra en la fig-3.3. Y el otro parámetro es la *desviación estándar* de la distribución, que mide el grado de dispersión de la variable X en torno a la media de la población

$$\sigma_X = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2} \quad (3.7)$$

Mientras la abscisa  $\mu$  coincide con el punto más alto de la campana, la desviación  $\sigma_X$  determina su grado de achatamiento, de modo que para  $\sigma_X$  grande la campana es suave y extendida, y para  $\sigma_X$  pequeña la campana es más aguzada y se concentra en torno al valor  $\mu$ .

En consecuencia, la probabilidad de ocurrencia de un dato  $X_i$  en el intervalo de confianza  $\mu - P_x < X < \mu + P_x$  se puede calcular con base en la fórmula:

$$\text{Prob}[\mu - P_x < X < \mu + P_x] = \int_{\mu - P_x}^{\mu + P_x} \frac{1}{\sigma_X \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}} \cdot dx \quad (3.8)$$

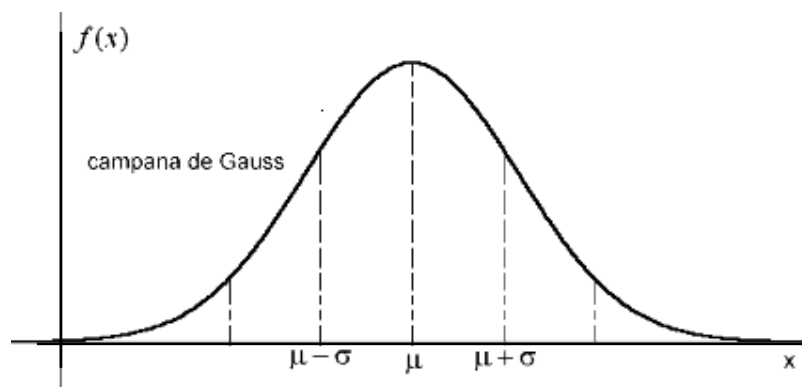


Figura 3.3. Distribución de probabilidad de Gauss con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma_X$

Sin embargo, la integral de la función de densidad de probabilidad de Gauss no se deja evaluar analíticamente, por lo cual se acostumbra presentar en los libros tablas de probabilidad gaussiana estandarizada, las cuales se construyen a partir de la variable transformada:



$$\tau = \frac{X - \mu}{\sigma_x} = \frac{P_x}{\sigma_x} \quad (3.9)$$

Por consiguiente, para un  $P_x/\sigma_x$  determinado, se tiene:

$$\text{Prob}[\mu - P_x < X < \mu + P_x] = \text{Prob}[\tau^- < \tau < \tau^+] = \int_{\frac{-P_x}{\sigma_x}}^{\frac{P_x}{\sigma_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\tau^2}{2}} \cdot d\tau \quad (3.10)$$

Observe que la transformación de la integral en el intervalo  $(\tau^-, \tau^+)$  produce el mismo valor de probabilidad correspondiente al intervalo de confianza  $\mu \pm P_x$ , con lo cual las expresiones (3.8) y (3.10) se vuelven equivalentes. La transformación, además, tiene la virtud de eliminar de la función de densidad estandarizada los parámetros  $\mu$  y  $\sigma_x$  o, dicho de otro modo, hace que la media de la función sea igual a 0 y que la desviación estándar correspondiente sea idénticamente igual a la unidad.

La tabla-A1 en el anexo puede utilizarse para estimar la probabilidad gaussiana en un intervalo de valores X. Específicamente, esta tabla fue construida con el propósito de facilitar el cálculo de los intervalos de confianza centrados en la media  $\mu$ , pero, como veremos en el ejemplo siguiente, incluso puede usarse para calcular probabilidades en intervalos no centrados.

**Ejemplo 3.1.** Una variable aleatoria gaussiana tiene media  $\mu = 5.00$  y desviación estándar  $\sigma_x = 1.00$ . Se desea conocer la probabilidad asociada a los intervalos:

- a)  $4.50 < X < 5.50$
- b)  $4.50 < X < 5.75$
- c)  $X \leq 6.50$

*Solución:*

a) Deseamos hallar  $\text{Prob}[4.50 < X < 5.50]$ . Sea  $X_1 = 4.50$  y  $X_2 = 5.50$ . Entonces:

$$\tau_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma_x} = \frac{4.50 - 5.00}{1.00} = -0.50$$

$$\tau_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma_x} = \frac{5.50 - 5.00}{1.00} = +0.50$$

Puesto que los valores  $\tau_1$  y  $\tau_2$  definen un intervalo de probabilidad centrado con respecto a la media estandarizada de la población, usaremos directamente la tabla-A1, según la cual:

$$\text{Prob}\left[\tau_1 \leq \frac{X - \mu}{\sigma_x} \leq \tau_2\right] = 2\text{Prob}[\tau = 0.50] = 0.3829 = 38.3\%$$

Por supuesto, este resultado equivale a responder la pregunta inicialmente planteada,

es decir:

$$\text{Prob}[4.50 < X < 5.50] = 38.3\%$$

b) Se pide encontrar  $\text{Prob}[4.50 < X < 5.75]$ . En este caso, siendo  $X_1 = 4.50$  y  $X_2 = 5.75$ , se tiene:

$$\tau_1 = -0.50 \text{ y } \tau_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma_x} = +0.75$$

Luego,

$$\text{Prob}[4.50 < X < 5.75] = \text{Prob}\left[\tau_1 < \frac{X - \mu}{\sigma_x} < \tau_2\right]$$

Y con base en la tabla -A1, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[4.50 < X < 5.75] &= \frac{1}{2} \{2 \text{Prob}[\tau_1]\} + \frac{1}{2} \{2 \text{Prob}[\tau_2]\} \\ &= \frac{1}{2} (0.3829) + \frac{1}{2} (0.5467) = 0.4648 = 46.5\% \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que el  $\frac{1}{2}$  aparece debido a que la tabla en cuestión provee valores correspondientes a intervalos centrados. Si el intervalo de probabilidad no fuera centrado entonces se puede separar en los mitades no simétricas con respecto a la media, y sumar los resultados (áreas) parciales.

c) Buscamos  $\text{Prob}[X \leq 6.50] = \text{Prob}[X < 6.50]$ . Sea pues  $X_1 = 6.50$  de modo que:

$$\tau_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma_x} = \frac{6.50 - 5.00}{1.00} = 1.50$$

En este caso también se trata de un intervalo no centrado que se extiende entre  $-\infty$  y 0 y entre 0 y  $\tau_1$ . Con ayuda de la tabla-A1 tenemos

$$\text{Prob}[X < 6.50] = \text{Prob}[\tau_1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \{2 \text{Prob}[\tau_1]\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (0.8664) = 0.9332 = 93.3\%$$

### 3.5. MUESTRAS DE UNA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA (t-STUDENT)

En este punto conviene precisar que, aunque en muchos casos la distribución normal (de Gauss) puede considerarse un buen modelo probabilístico -o por lo menos aceptable- para la función del error aleatorio, la condición de información infinita necesaria para el cálculo de la media y la desviación estándar de la población es imposible de satisfacer. Es más, en muchos casos la información de la variable aleatoria que aporta la muestra de la población es realmente escasa. En estas circunstancias – esto es, cuando la muestra tiene menos de 30 datos- es preferible usar la distribución de probabilidad t-Student, la cual se define en términos de los valores estimados de la media y la desviación de la población. Así pues, llamamos *valor medio de una población muestral* a la cantidad definida como:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_i \quad (3.11)$$

donde N es el número de datos de la muestra; y la fórmula para calcular la *desviación estándar de la muestra* será:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} \quad (3.12)$$

Se puede demostrar que ambos valores estimados tienden a los parámetros propios de la población cuando el tamaño de la muestra aumenta. Entretanto, la media muestral se comporta como un valor aleatorio que varía en función del tamaño N, de modo que la *desviación estándar de la media muestral* se define como la cantidad

$$S_{\bar{X}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} \quad (3.13)$$

Cuando N crece  $S_{\bar{X}}$  tiende a cero y, si el comportamiento de la variable aleatoria es realmente gaussiano, la distribución t-Student reproducirá a la larga el patrón correspondiente a una distribución normal.

Ahora bien, los cálculos de probabilidad para la t-Student se hacen con base en la variable estandarizada

$$t = \frac{X - \mu}{S_x} \quad (3.14)$$

Y del mismo modo se puede proceder para el cálculo de probabilidad asociado a la media muestral sólo con usar  $\bar{X}$  y  $S_{\bar{X}}$ , en cambio de las  $X$  y  $S_x$  que aplican para la variable  $X$ . En este caso, el parámetro t de la distribución está asociado con  $\nu = N - 1$  grados de libertad, y puede consultarse en la tabla-A2 para un nivel de confiabilidad satisfactorio, que en las circunstancias rutinarias de laboratorio por lo general es del 95%.

Así que la probabilidad correspondiente a una confiabilidad C se expresa tanto para la variable como para la media muestral en términos de las siguientes relaciones:

$$\text{Prob}[\bar{X} - P_x \leq X \leq \bar{X} + P_x] = C \quad (3.15)$$

Y

$$\text{Prob}[\bar{X} - P_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + P_{\bar{X}}] = C \quad (3.16)$$

Donde los *límites de precisión de la muestra*, cuyas fórmulas son:

$$P_x = t \cdot S_x \quad \text{y} \quad P_{\bar{X}} = t \cdot \frac{S_x}{\sqrt{N}} \quad (3.17)$$

representan los rangos de la variable X en torno al valor  $\bar{X}$  en los cuales reside una

probabilidad  $C$  de que la variable muestral y la media muestral, respectivamente, se encuentren en los intervalos  $\bar{X} \pm P_x$  y  $\bar{X} \pm P_{\bar{X}}$ .

**Ejemplo 3.2.** Se lee la temperatura de un fluido independientemente por 24 estudiantes con un termómetro que tiene resolución de  $\pm 0.1^\circ\text{F}$ . La media muestral es  $\bar{T} = 97.22^\circ\text{F}$  y la desviación estándar de la muestra es  $S_T = 0.082^\circ\text{F}$ . Encuentre los límites de precisión de la medida y discuta el resultado. Asuma que los errores de sesgo son despreciables.

*Solución:*

Asumamos un intervalo de confianza del 95%. El número de grados de libertad de la muestra es  $\nu = 24 - 1 = 23$ . De la tabla-A2 encontramos que:

$$t = 2.069$$

Calculemos ahora los límites de precisión de la muestra y de la media muestral. Esto es:

$$P_T = t \cdot S_T = (2.069) \cdot (0.082^\circ\text{F}) = 0.170^\circ\text{F}$$

$$P_{\bar{T}} = \frac{t \cdot S_T}{\sqrt{N}} = \frac{(2.069) \cdot (0.082^\circ\text{F})}{\sqrt{24}} = 0.0346^\circ\text{F}$$

En consecuencia, el intervalo de confianza del 95% para la temperatura será:

$$\bar{T} \pm P_T = 97.2^\circ\text{F} \pm 0.2^\circ\text{F}$$

Puesto que la resolución del termómetro es  $0.1^\circ\text{F}$ , los valores en la expresión anterior han sido redondeados a una sola cifra decimal.

Por otra parte, el intervalo

$$\bar{T} \pm P_{\bar{T}} = 97.22^\circ\text{F} \pm 0.03^\circ\text{F}$$

representa el rango de valores de  $X$  en el cual esperamos (con un 95% de confianza) se encuentre el valor medio de la distribución de probabilidad, que se estrecharía si aumentara el número de datos de la muestra. Precisamente porque dicho intervalo se refiere más a la distribución de probabilidades que a la muestra, hemos expresado los valores de este intervalo con 2 cifras decimales.

### 3.6. CRITERIO ESTADÍSTICO PARA DEPURACIÓN DE DATOS DE UNA MUESTRA

Cuando en una muestra de datos hay algunos que se encuentran considerablemente alejados del comportamiento general, se puede aplicar un criterio estadístico que permite descartar por lo menos los más excepcionales. Según este criterio, denominado de Chauvenet, son descartables todos aquellos valores que estén por fuera del intervalo de probabilidad gaussiana (centrado en la media) correspondiente a

una confiabilidad  $C = 1 - \frac{1}{2N}$ , donde  $N$  es el número de datos originales de la muestra; dicho criterio sólo puede ser aplicado una vez a la muestra original. En la

tabla-3.1 aparecen algunos valores de  $N$  y los correspondientes de  $\tau_{m\acute{a}x}$  que definen el intervalo de confianza por fuera del cual un dato se considera extremo. Para otros valores de  $N$  se recomienda el uso directo de la tabla-A1.

**Tabla 3.1. Criterio de Chauvenet**

N	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
$\tau_{max} = \frac{X_{max}}{Sx}$	1.38	1.54	1.65	1.73	1.80	1.87	1.91	1.96	2.13	2.24	2.33

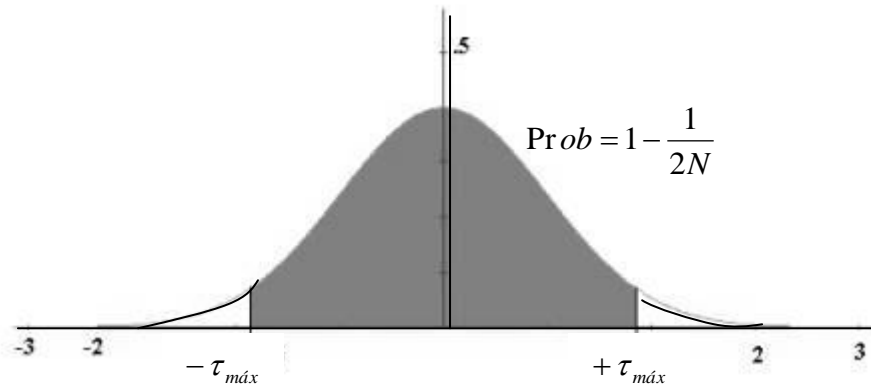


Figura 3.4. Criterio de Chauvenet para eliminar datos extremos de la muestra

**Ejemplo 5.3.** Varios estudiantes miden la presión en un punto de un flujo estacionario (es decir, que no depende del tiempo) con un manómetro, en pulgadas de columna de agua. Los datos se presentan en la tabla siguiente. ¿Cómo aplicar el criterio de Chauvenet para depurar la muestra?

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_i$	1.15	1.14	1.01	1.10	1.11	1.09	1.10	1.10	1.55	1.09

*Solución:*

Con base en los datos  $X_i$  calculamos la media y la desviación estándar de la muestra:

$$\bar{X} = 1.14 \quad \text{y} \quad Sx = 0.15$$

Y con base en estos se calculan los valores de la variable estandarizada  $\tau$  :

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tau = \frac{ X_i - \bar{X} }{Sx}$	0.07	0.00	0.87	0.27	0.20	0.33	0.27	0.27	2.73	0.33

Puesto que  $N=10$ , el criterio de Chauvenet excluye todos aquellos datos que excedan la confiabilidad:

$$C = 1 - \frac{1}{2N} = 0.95$$

Según la tabla-3-1, esta confiabilidad corresponde a  $\tau_{m\acute{a}x} = 1.96$ , por lo cual se pueden excluir aquellos valores con  $\tau > 1.96$ , en nuestro caso el dato  $i=9$ . Después de la depuración se obtienen nuevos parámetros muestrales:

$$\bar{X} = 1.10 \quad \text{y} \quad S_x = 0.04$$

Obsérvese cómo el nuevo valor de  $\bar{X}$  difiere del calculado con la serie original de datos en apenas un  $\sim 4\%$ , mientras que  $S_x$  es ahora casi una cuarta parte que la desviación muestral antes calculada.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En el ensamblaje de una máquina se requiere acoplar un pasador cuyo diámetro puede estar en un rango de tolerancia de 0.244 a 0.256 pulgadas. El valor medio de los diámetros es 0.250" y la desviación estándar es 0.003". Suponiendo que los diámetros de los pasadores se distribuyen gaussianamente, ¿Qué porcentaje de los pasadores debe esperarse que sea defectuoso?

**Respuesta:** 4.55 %

2. Sea  $X$  una variable aleatoria que representa la resistencia de rotura a tracción de un hilo, distribuida normalmente. La media de  $X$  es  $\mu = 165$  y la desviación estándar  $\sigma_x = 3.0$ . Si el hilo se considera defectuoso cuando  $X < 162$ , ¿Qué probabilidad hay de que, escogiendo un hilo al azar, éste resulte defectuoso?

**Respuesta:** 16%

3. Un fabricante de motores encontró, basado en numerosas mediciones, que el valor promedio de la eficiencia de sus motores es 0.88 y la desviación estándar 0.05. ¿Qué probabilidad hay de que un motor cualquiera tenga una eficiencia menor o igual a 0.8? ¿Qué probabilidad hay de que la eficiencia sea mayor que 1.0?

**Respuesta:** 5.5%; ninguna.

4. Una empresa fabricante de paracaídas de carga asegura que estos tienen un dispositivo para hacer abrir el paracaídas a una altura de 200m sobre el nivel del piso, con una desviación estándar de 80m. Si el paracaídas no se abre a una altura mayor a 50m lo más probable es que la carga se destruya con el golpe. ¿Cuál es la probabilidad de que una carga cualquiera se estropee en la caída?

**Respuesta:** 3.1%

5. Un micro-manómetro convenientemente calibrado se usó para medir una presión promedio de 0.2psi en una cámara de gas. El 50% de las lecturas estuvo entre 0.18psi y 0.22psi.

- a) Estime la desviación estándar de la presión en la cámara. **Resp:**  $\sigma=0.03$  psi.
- b) Halle el intervalo de confianza del 95% para la presión. **Resp:**  $0.20 \pm 0.06$  psi

6. Se sabe que la desviación estándar correspondiente a la medición con una

termocupla es de  $1.2^{\circ}\text{C}$ . Si se quiere medir una temperatura de  $85^{\circ}\text{C}$ , ¿Cuál será el intervalo de confianza del 95% para un número grande de medidas?

**Respuesta:**  $T(^{\circ}\text{C}) = 85.0 \pm 2.0$

7. Con un termistor se realizaron las siguientes mediciones de temperatura en un sistema estacionario:  $35.6^{\circ}\text{C}$ ,  $34.5^{\circ}\text{C}$ ,  $36.2^{\circ}\text{C}$ ,  $36.0^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuáles son los límites de precisión de la variable y de la media de la variable, asociados con un intervalo de confianza del 95%?

**Respuesta:** para la variable  $P_x = 2.4^{\circ}\text{C}$ ; y para la media  $P_{\bar{x}} = 1.2^{\circ}\text{C}$

8. Una variable se midió 100 veces en el laboratorio y se obtuvo un límite de precisión relativo para la media,  $\mu$ , del 10%. ¿Cuántas mediciones estimaría usted que se requiere para bajar el límite de precisión de la media al 5%? Se supone que los valores de la media y la desviación estándar son ya estables para una muestra de 100 datos.

**Respuesta:**  $N=400$

9. Siete estudiantes estuvieron determinando la constante elástica de un resorte lineal y obtuvieron los siguientes valores en  $\text{N/cm}$ : 5.24, 5.31, 5.28, 5.16, 5.27, 5.26, 5.29. (a) Encuentre el mejor valor estimado de la constante e incluya el límite de precisión correspondiente a la misma. (b) ¿Aplicando el criterio de Chauvenet, descartaría usted algún dato? ¿Cómo varían los resultados?

**Respuesta:** a)  $K (\text{N/cm}) = 5.26 \pm 0.12$   
b) Se descarta el dato  $5.16 \text{ N/cm}$  y produce  $K (\text{N/cm}) = 5.28 \pm 0.06$

10. En un experimento de caída de esferas para determinar la viscosidad de una miel se escogieron 10 balines de aproximadamente el mismo tamaño, a los cuales se les midió el diámetro con un calibrador. Los valores fueron, en  $\text{cm}$ : 0.170, 0.177, 0.181, 0.180, 0.183, 0.177, 0.167, 0.181, 0.178 y 0.179. Calcule el valor promedio del diámetro y su límite de precisión, antes y después de haber aplicado el criterio de Chauvenet.

**Respuesta:** a) Antes  $d (\text{cm}) = 0.18 \pm 0.01$   
b) No se depura la muestra original

### Ejercicio para hacer en casa:

Tome 30 monedas de la misma clase y déjelas caer al azar sobre una superficie plana. Llame  $X$  la variable aleatoria que corresponde al número total de caras obtenidas en cada lanzamiento. Repita este experimento por lo menos 100 veces y determine cada vez el valor de  $X$ . La variable  $X$  obedece una distribución binomial de probabilidades, pero si el número de lanzamientos de las monedas es suficientemente grande, entonces  $X$  tiende a distribuirse como una variable gaussiana.

- a) Calcule el valor medio de  $X$ ,  $\bar{X}$ , y la desviación estándar,  $S_x$ , de los experimentos.
- b) Dibuje un diagrama de frecuencias relativas – frecuencia relativa vs.  $X$  – y superponga al mismo la función de densidad de probabilidad gaussiana correspondiente a los parámetros estadísticos de sus datos. Observe

cuidadosamente el resultado y anote sus análisis al respecto. Tenga en cuenta que la frecuencia relativa de un valor  $X$ ,  $\text{frec}(X)$ , se define como  $\text{frec}(X)=n(X)/N$ , donde  $n(X)$  es el número de veces que en los  $N$  lanzamientos se obtuvo el valor  $X$  de la variable.

c) ¿Qué probabilidad hay de que en un nuevo lanzamiento se obtenga un número de caras entre 12 y 18?

d) ¿Cuáles son los límites de precisión de la variable  $X$  y del valor medio  $\bar{X}$ ?

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Coleman, H y W. Steele. *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers*. John Wiley and Sons. 1989.

Mandel, J. *The Statistical Analysis of Experimental Data*. Dover Publ. New York, 1964.

Meyer, P. *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. Fondo Educativo Interamericano, S.A. México, 1973.

Spiegel, M. *Estadística*. McGraw-Hill. México, 1970.



## CAPÍTULO 4

# PROPAGACIÓN DE ERRORES EXPERIMENTALES

El trabajo de cálculo en áreas técnicas y científicas en buena medida está basado en el uso de relaciones funcionales explícitas, donde la magnitud de la variable dependiente queda determinada por un conjunto de magnitudes que, en multitud de casos, tienen naturaleza experimental. Por supuesto, los errores de las variables experimentales inciden en la confiabilidad de la variable explícita o, dicho de otro modo, se propagan a ésta. El propósito del presente capítulo es el de formalizar los procedimientos para la estimación del error acumulado (propagado) en la variable dependiente de la relación funcional. Reiteremos que el trabajo del experimentador se cualifica en la medida en que no solamente es capaz de estimar los valores de una magnitud cualquiera sino también de establecer los límites de precisión correspondientes asociados a niveles aceptables de confiabilidad.

### 4.1. PROPAGACIÓN DE LOS ERRORES

Consideremos una relación funcional representada por el modelo matemático

$$y = y(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_m) \quad (4.1)$$

Donde la magnitud  $y$  depende, en principio, de los  $m$  valores estimados de las variables independientes  $X_i$ ; o, para decirlo en otras palabras, donde se entiende que dadas la forma de la función y las cantidades  $X_i$ , es posible calcular el valor estimado de  $y$ . Sin embargo, puesto que, en general, cada una de las variables  $X_i$  tiene error, es lógico pensar que estos afectan el nivel de confiabilidad de  $y$ , lo cual implica la necesidad de desarrollar una fórmula para estimar el error absoluto propagado y acumulado en el cálculo de  $y$ .

En principio, la teoría de la propagación acostumbra asumir que los errores son algo así como pequeñas desviaciones de los datos respecto de los valores exactos y entonces parte de una expansión en serie Taylor hasta la primera derivada para encontrar el orden de magnitud del error propagado a la variable dependiente, es decir:

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial y}{\partial X_2} \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial X_m} \Delta X_m$$

Aquí llamamos  $\Delta X_i$  al error total asociado al cálculo de la variable  $X_i$ , el cual se puede hallar con base en la siguiente fórmula

$$\Delta X_i \approx (B_i^2 + P_i^2)^{1/2} \quad (4.2)$$

donde  $B_i$  es el error de sesgo de  $X_i$  y  $P_i$  es su error de precisión, definido para un intervalo de confianza del  $C(\%)$ . Sin embargo, la expansión escrita arriba debe ser modificada un poco debido a que se requiere que todos los términos involucrados en ella sean estrictamente positivos y sumen en la fórmula. Este requerimiento se cumple si el error absoluto en  $y$  se calcula con la siguiente expresión:

$$\Delta y \approx \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial X_1} \Delta X_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial X_i} \Delta X_i\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial X_m} \Delta X_m\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial y}{\partial X_i} \Delta X_i\right)^2} \quad (4.3)$$

Por supuesto, el buen cálculo de  $\Delta y$  está supeditado a que las derivadas  $\partial y / \partial X_i$  existan y sean continuas en los intervalos de interés de las variables y a que, en efecto, los errores propagados sean relativamente pequeños. Además, por regla general, el uso de la fórmula anterior está condicionado al hecho de que se pueda despejar en forma explícita la variable de interés en términos de las demás; si esto no se hace previamente la fórmula produce resultados no razonables.

**Ejemplo 4.1.** Explique porqué el error absoluto en la estimación de la tangente de un ángulo ( $\Delta \tan \theta$ ) es proporcional al error absoluto en la determinación del ángulo ( $\Delta \theta$ ) según la expresión

$$\Delta \tan \theta = \sec^2 \theta \cdot \Delta \theta$$

*Respuesta:*

En este caso la variable dependiente es la tangente, la cual depende de la estimación del ángulo  $\theta$ . Entonces, según la fórmula (4.3)

$$\Delta \tan \theta \approx \sqrt{\left(\frac{\partial \tan \theta}{\partial \theta} \Delta \theta\right)^2} = \sqrt{(\sec^2 \theta \cdot \Delta \theta)^2} = \sec^2 \theta \cdot \Delta \theta$$

Por ejemplo, si  $\theta = 0.2094 \pm 0.0001 \text{ rad}$  y dado que  $\sec \theta = 1.02239$ , se obtiene un orden de magnitud para el error de la tangente  $\Delta \tan \theta \approx 0.0001$ .

**Ejemplo 4.2.** Encuentre una expresión para el error  $\Delta y$  en la función  $y = x \pm z$ . Asuma que es válida la aplicación de la fórmula (4.3).

*Respuesta:*

La fórmula de propagación produce

$$\Delta y \approx \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \Delta z\right)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} \quad (4.4)$$

Observe que esta expresión es indiferente al hecho de que las variables independientes sumen o resten en la función original. Este resultado es muy útil en la práctica cotidiana.

#### 4.2. PROPAGACIÓN DE ERRORES EN PRODUCTOS VIETANOS

Un tipo de función muy común es el llamado *Producto Vietano*, cuya forma genérica es

$$y = CX_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_i^{\alpha_i} \dots X_m^{\alpha_m} \quad (4.5)$$

donde  $C$  es una constante y los  $\alpha_i$ , con  $i=1,2,\dots,m$ , son los exponentes propios de las variables  $X_i$ .

A partir de la fórmula (4.3), se demuestra que:

$$\Delta y \approx \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \alpha_i CX_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_i^{\alpha_i} \dots X_m^{\alpha_m} \frac{\Delta X_i}{X_i} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \alpha_i y \frac{\Delta X_i}{X_i} \right)^2}$$

Observe cómo, al extraer de la sumatoria el factor común  $y^2$ , sacarlo luego de la raíz y pasarlo a la izquierda para dividir a  $\Delta y$ , obtenemos el error relativo en la función, el cual se expresa

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \alpha_i \frac{\Delta X_i}{X_i} \right)^2} \quad (4.6)$$

Por tanto, si se tiene en cuenta que el error relativo de una variable  $X_i$  también se puede escribir como el cociente entre el error total de la variable y su magnitud, que aquí denominaremos  $\varepsilon_i$ , finalmente la fórmula (4.6) se deja escribir como:

$$\varepsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\alpha_i \varepsilon_i)^2} \quad (4.7)$$

Reiteramos que esta fórmula es sólo válida para un producto vietano y que está basada en la fórmula más general (4.3)

**Ejemplo 4.3.** Se busca estimar la densidad de un gas ideal con un error relativo de 0.5%. La temperatura del gas es  $T=25^\circ\text{C}\pm 1^\circ\text{C}$ , mientras que el error en el valor disponible de la constante del gas es tan bueno que su influencia en el cálculo de la densidad puede considerarse despreciable. ¿Cuál es el error absoluto máximo permisible en la determinación de la presión del gas para que el error de la densidad se mantenga en los niveles requeridos?

*Solución:*

El modelo del gas ideal se puede escribir en este caso de la siguiente manera:

$$p = \rho R^* T$$

Donde  $R^*$  es la constante del gas. Como el propósito de este análisis es que el error propagado a la densidad quede por debajo de 0.5%, entonces despejamos explícitamente la densidad de la fórmula anterior, esto es

$$\rho = \frac{p}{R^* T}$$

Una vez se reconoce aquí la fórmula del producto vietano, se aplica la expresión (4.7)

$$\varepsilon_\rho^2 = \varepsilon_p^2 + \varepsilon_T^2$$

Además, de los datos del problema sabemos que:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = 0.005 \qquad \varepsilon_T = \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{298} = 0.0034$$

Por consiguiente:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta p}{p} = \sqrt{0.005^2 - 0.0034^2} = 0.0037 = 0.37\%$$

Observe que en el cálculo del error relativo de la temperatura se usó la escala Kelvin; similarmente, en las estimaciones del error relativo de la presión se deben usar valores de presión absoluta más bien que de presión manométrica.

**Ejemplo 4.4.** Una esfera se deja caer en un fluido newtoniano en reposo. Inicialmente la esfera tiene velocidad  $V_o$  pero, al cabo de un rato, alcanza una velocidad constante (denominada límite), que depende del equilibrio entre las fuerzas de gravedad, el empuje arquimediano del fluido sobre la esfera y el arrastre viscoso, opuesto a la caída. Según esto, la segunda ley de Newton para las fuerzas verticales sobre la esfera se escribe:

$$\sum F_v = (\rho_c - \rho_f)g \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi\mu R V_L = 0$$

En esta ecuación  $\rho_c$ ,  $\rho_f$  son las densidades de la esfera y el fluido respectivamente,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $R$  es el radio de la esfera,  $\mu$  es la viscosidad del fluido y  $V_L$  la magnitud de la velocidad límite; por supuesto, para que la esfera caiga se requiere que su densidad sea mayor que la del fluido. Dadas estas circunstancias, se puede calcular la viscosidad del fluido a partir de la magnitud del resto de variables del problema y estimar el error correspondiente que se propaga. Encuentre una expresión para este error.

*Solución:*

Con base en la ecuación de equilibrio, la viscosidad del fluido se puede expresar explícitamente como

$$\mu = \frac{2}{9}(\rho_c - \rho_f) \frac{gR^2}{V_L}$$

En esta fórmula reconocemos un producto vietano, donde uno de los factores es la diferencia de densidades. Por lo visto en la expresión (4.4), el error de este factor se calcula como

$$\varepsilon_{\delta\rho} = \frac{\Delta(\rho_c - \rho_f)}{(\rho_c - \rho_f)} = \frac{\sqrt{\Delta\rho_c^2 + \Delta\rho_f^2}}{(\rho_c - \rho_f)}$$

Hecha esta precisión, el error relativo de la viscosidad del fluido en el experimento de la caída de la esfera es el siguiente:

$$\varepsilon_{\mu} = \frac{\Delta\mu}{\mu} = \sqrt{\varepsilon_{\delta\rho}^2 + \varepsilon_g^2 + 4\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{V_L}^2}$$

Debido a que el exponente del radio es 2, conviene mantener un control especial en la magnitud del error correspondiente.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea  $x=52.7\pm 0.2\text{cm}$  y  $y=37.1\pm 0.1\text{cm}$ . a) Encuentre  $z=x+y$  e incluya el cálculo del error de  $z$ . b) Encuentre  $z=x-y$ , incluya el cálculo del error. c) ¿Cuál de las dos magnitudes dadas contribuye con mayor error relativo?
2. Considere el producto

$$M = A \cdot B^2 \cdot C^3 \cdot D^4$$

Los valores de los factores involucrados son:  $A=1$ ,  $B=10$ ,  $C=100$ ,  $D=1000$ , todos ellos con errores relativos de 0.01%. Calcule  $M$  e incluya el error total correspondiente.

3. En un triángulo rectángulo los catetos miden  $a=105\pm 1\text{mm}$ ,  $b=84\pm 1\text{mm}$ . a) Estime la magnitud de la hipotenusa con el error correspondiente. b) Estime el ángulo entre la hipotenusa y el cateto más largo, incluya el error.
4. Calcule con el error: a)  $\tan(53^\circ \pm 0.2^\circ)$ , b)  $\sin(37^\circ \pm 0.5^\circ)$
5. Halle el error en la función exponencial  $y = e^{3 \pm 0.05}$ .
6. La aceleración centrípeta está dada por la expresión  $a_c = V^2 / R$ . Si el error relativo en el radio es  $\Delta R / R \approx 4\%$  y en la velocidad  $\Delta V / V \approx 2\%$ , estime el error relativo en la aceleración.
7. La ecuación de estado de un gas ideal puede escribirse como

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

donde  $p$  es la presión,  $V$  el volumen,  $m$  la masa,  $M$  el peso molecular,  $R$  la constante universal de los gases y  $T$  la temperatura absoluta. En un experimento con  $CH_4$  se obtuvieron los siguientes resultados experimentales:

$$\begin{aligned}p &= 0.967 \pm 0.01 \text{ atm} \\V &= 210 \pm 2 \text{ mL} \\m &= 0.137 \pm 0.002 \text{ g} \\T &= 25 \pm 1 \text{ }^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Calcule el peso molecular del  $CH_4$  e incluya el error correspondiente.

8. Se mide el diámetro de una esfera y se obtiene  $d=5.0 \pm 0.1$  cm. a) Determine el área superficial de la esfera y el error propagado; b) calcule el volumen de la esfera y el error. Asuma  $\pi = 3.1416$ .
9. Una esfera de radio  $r=1.00 \pm 0.01$  cm tiene una masa  $m = 5.50 \pm 0.01$  g. ¿Cuál es el valor de la densidad del material?
10. La viscosidad relativa de un líquido puede estimarse con base en un viscosímetro Ostwald por medio de la fórmula:

$$\frac{\mu}{\mu_o} = \frac{\rho \cdot t}{\rho_o t_o}$$

Donde:

$\mu, \mu_o$ : viscosidades dinámicas del líquido en cuestión y el líquido de referencia, respectivamente.

$\rho, \rho_o$ : densidades del líquido y el líquido de referencia, respectivamente.

$t, t_o$ : tiempos que se demoran en pasar a través de un capilar determinadas cantidades del líquido problema y del líquido de referencia, respectivamente.

En un experimento realizado a  $T= 25 \pm 1^\circ\text{C}$  se obtuvieron los siguientes datos:

$$\begin{aligned}\rho &= 0.897 \pm 0.003 \text{ g/cm}^3 \\ \rho_c &= 0.99707 \pm 0.00005 \text{ g/cm}^3 \\ t &= 36.4 \pm 0.4 \text{ s} \\ t_o &= 45.1 \pm 0.4 \text{ s}\end{aligned}$$

Calcule la viscosidad relativa del líquido y el error correspondiente.

11. El módulo de cizalladura de un sólido elástico,  $G$ , se determina mediante un experimento de torsión que corresponde a la fórmula:

$$\theta = \frac{2LT}{\pi R^4 G}$$

Si todas las variables, menos  $G$ , se miden con error relativo del 4%, ¿cuál es el error relativo en  $G$ ?

12. En un flujo laminar de fluido newtoniano por una tubería horizontal de radio  $R$ ,

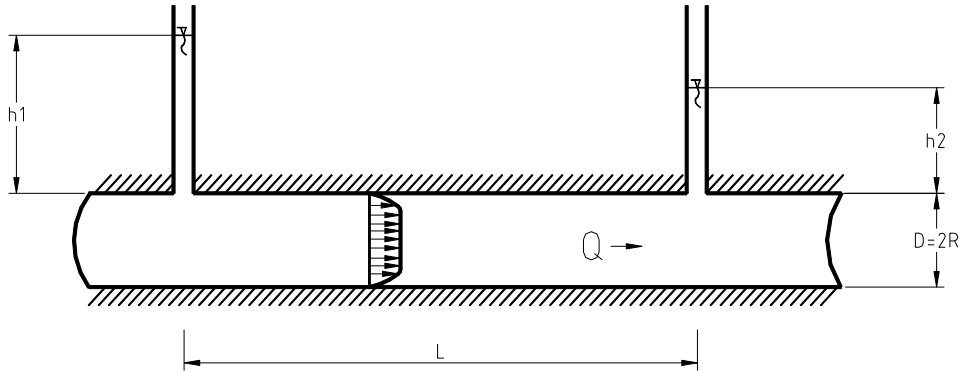
la viscosidad dinámica del fluido,  $\mu$ , puede calcularse con base en la fórmula:

$$\mu = \frac{\pi \Delta P R^4}{8 L Q}$$

Donde:

$\Delta p/L$ : gradiente longitudinal de presión entre dos secciones de tubería.

$Q$ : caudal volumétrico.



Experimentalmente se determinan los valores de  $\Delta p/L$ ,  $R$ ,  $Q$  con errores relativos de 1/1000.

a) ¿Cuál será el error relativo en el cálculo de  $\mu$ ? ¿En qué proporción afecta  $\varepsilon_R$  el valor estimado de  $\varepsilon_\mu$ ?

b) Si  $R=1.0$  cm,  $\Delta P/L= 9.8$  g.cm<sup>-2</sup>.s<sup>-2</sup>,  $Q=384$ cm<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup>, estime la viscosidad dinámica del fluido,  $\mu$ .

13. En un experimento como el descrito en el ejemplo (4.4) se obtuvieron los siguientes datos:

$$\begin{aligned} v_L &= 0.45 \pm 0.02 \text{ cm/s} \\ \rho_f &= 1.41 \pm 0.01 \text{ g/cm}^3 \\ g &= 978 \pm 1 \text{ cm/s}^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, la determinación de la  $V_L$  se hizo con 30 esferas que tenían, en conjunto, una masa de  $4.5 \pm 0.1$  g.

a) ¿Cuál ha de ser el error relativo en el radio,  $\varepsilon_R$ , para que los errores relativos en las densidades  $\rho_c$  y  $\rho_f$  sean similares?

b) ¿Si el error absoluto de  $R$  es de 0.015 cm y  $\varepsilon_R$  lo conocemos del literal (a), ¿cuánto vale  $R$ ?

c) Tome  $R$  conocido de (b) y exprese el valor de  $\mu$  incluyendo el error total correspondiente.

14. En un experimento de caída libre se quiere calcular la longitud de la trayectoria,  $L$ , a partir de la fórmula

$$L = V_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

donde  $V_o$  es la velocidad inicial de caída del móvil,  $t$  el tiempo de caída y  $g$  la aceleración de la gravedad. Después de medir se obtuvo que:

$$V_o = 120 \pm 5 \text{ cm/s}$$
$$t = 9 \pm 0.02 \text{ s}$$

Estime el valor de  $L$ . Tome  $g = 978 \pm 1 \text{ cm/s}^2$ .

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Benjamín, J.R. and C. Allin Cornell. *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*. McGraw-Hill.USA, 1970.

Coleman, H y W. Steele. *Experimentation and Uncertainty Análisis for Engineers*. John Wiley and Sons. 1989.

Daniels, F. et al. *Experimental Physical Chemistry*. Sixth edition. McGraw-Hill.1962.

Mandel, J. *The Statistical Analysis of Experimental Data*. Dover Publ. New York, 1964.

Meyer, P. *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. Fondo Educativo Interamericano, S.A. México, 1973.

Naranjo, J.A. y J.F. Jiménez. *Errores y ajustes*. Universidad Nacional de Colombia. 1990.

Ryan, T.P. *Modern Regression Methods*. John Wiley and sons. USA, 1997.

Spiegel, M. *Estadística*. McGraw-Hill. México, 1970.

Taylor, J. *An introduction to Error Analysis*. Second edition. University science books. Sausalito, CA. 1997.

Walpole, R.E. y R.H. Myers. *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Nueva Editorial Latinoamericana. México, 1978.



## CAPÍTULO 5

# AJUSTE DE FUNCIONES POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Sea  $(x_i, y_i)$  una pareja de datos experimentales asociados por alguna relación funcional. Supongamos que la dicha relación puede ser expresada mediante un modelo matemático del tipo:

$$y_i = f(x_i, A) + \varepsilon_i \quad (5.1)$$

Donde  $f(x_i, A)$  es una función de carácter determinístico que se define en términos del valor de la variable independiente  $x_i$ , de un conjunto de parámetros  $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m)$  y de un patrón funcional específico (lineal, parabólico, exponencial, etc.), el cual se elige con base en la naturaleza del experimento y la disposición espacial de los puntos  $(x_i, y_i)$  en un plano XY. Desde este punto de vista,  $f(x_i, A)$  corresponde al valor estimado de la ordenada  $y_i$  en la relación funcional.

Por otro lado, el término  $\varepsilon_i$ , conocido con el nombre de *residuo*, representa el error aleatorio por ordenadas, el cual explica la diferencia entre un valor observado  $y_i$  y el correspondiente valor estimado  $f(x_i, A)$ . En ausencia de otra información, es común asumir que la función de distribución de probabilidad para  $\varepsilon_i$  es gaussiana.

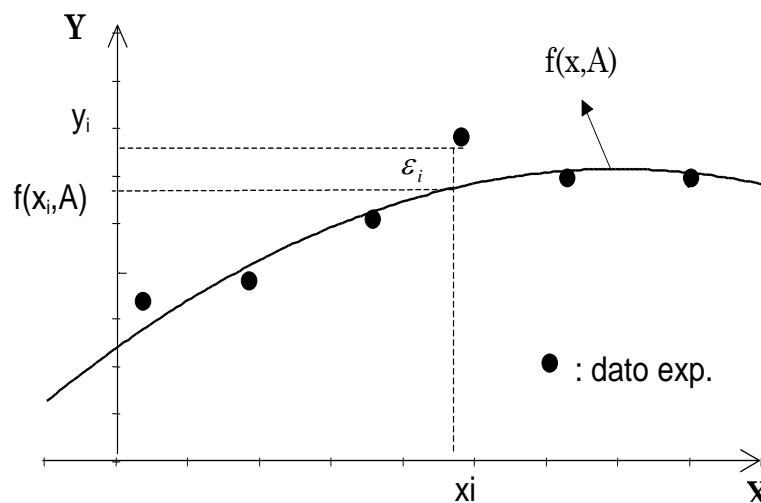


Figura 5.1. Ajuste de la función  $f(x_i, A)$  a  $N$  parejas de datos  $(x_i, y_i)$ . Ahora bien, dadas  $N$  parejas de datos  $(x_i, y_i)$  y elegido el tipo de función, nos interesa

encontrar un conjunto de parámetros  $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m)$  que defina una trayectoria para  $f(x_i, A)$  en el plano  $XY$ , que pase lo más cerca posible de las parejas experimentales y permita determinar los residuos. Este procedimiento, conocido como *ajuste de la función*, requiere de algún criterio numérico que se pueda aplicar con sistematicidad, razón por la cual se han desarrollado diferentes métodos de regresión, como son el de los Mínimos Cuadrados o el de los Residuos ponderados, entre otros. Tenga en cuenta el lector, sin embargo, que aunque estos métodos son de gran ayuda para el tratamiento de datos experimentales, en sí mismos no añaden física al análisis experimental.

### 5.1. MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS (MMC).

El criterio básico de ajuste sobre el que se basa este método consiste en minimizar la suma de los residuos  $\varepsilon_i$  elevados al cuadrado. Es decir.

$$\text{Min} \left\{ q = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, A)]^2 \right\} \quad (5.2)$$

Observemos que  $q$  es siempre una cantidad positiva y que, estrictamente, no puede alcanzar un valor máximo absoluto, pues siempre será posible hallar un conjunto de parámetros  $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m)$  que hiciera inmensamente grande la sumatoria. Además, resaltemos que para aplicar el método se requiere conocer previamente las  $N$  parejas  $(x_i, y_i)$  y la forma funcional de  $f(x_i, A)$ .

El objetivo de minimizar la sumatoria se logra al derivar  $q$  respecto de cada uno de los  $m$  parámetros, igualar estas expresiones a cero y resolver el sistema de  $m$  ecuaciones algebraicas resultante, a saber:

$$\frac{\partial q}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Téngase en cuenta que el objetivo de resolver este sistema es determinar el conjunto de parámetros  $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m)$  que definen la trayectoria de  $f(x_i, A)$  en el plano  $XY$ .

Este método es tan sencillo de aplicar que su uso termina siendo un proceso rutinario en el análisis de datos experimentales, por lo cual vale la pena tener en cuenta algunas indicaciones básicas, como las que se exponen a continuación. En primer lugar, salta a la vista el hecho de que a mayor número de parejas de datos  $(x_i, y_i)$  disponibles para un ajuste es más robusto el modelo de regresión; así, por ejemplo, entre sólo dos puntos siempre podremos trazar una línea recta perfectamente ajustada –  $q$  daría cero en este caso –, pero este resultado no expresa la perfecta concordancia entre el experimento y el modelo sino, más bien, que la regresión se realiza a partir de la mínima información experimental requerida para aplicar el ajuste lineal de mínimos cuadrados.

En correspondencia con el punto anterior, es importante resaltar la importancia que tiene el hecho de disponer no sólo de los parámetros de la función, sino también de índices convenientemente calculados que informen acerca de la confiabilidad del modelo ajustado y de los parámetros mismos. En el primer caso se hablará de la

*banda de confianza* en torno a la función y en el segundo, relativo a los parámetros, de los *límites de precisión* correspondientes, de modo similar a como se hace en el caso de la medición de una variable singular. Habrá que tener en cuenta que dichos índices dependen no sólo de la naturaleza del experimento sino del tipo de modelo ajustado y del volumen de información disponible sobre él.

Y, finalmente, recuerde: ningún método de ajuste le añade física al análisis, aunque puede contribuir grandemente a discernir la naturaleza del experimento.

A continuación se aplicará el Método de Mínimos Cuadrados a funciones lineales con y sin intercepto. La importancia de la aplicabilidad de estos resultados es difícil de exagerar, y no porque la linealidad sea predominante en la naturaleza (más bien es todo lo contrario) sino como porque muchas funciones no lineales son fáciles de linealizar. Observe, por ejemplo, los siguientes casos de funciones no lineales y su equivalente lineal:

Hipérbola equilátera,  $y = Cte/x$ : se puede linealizar definiendo  $x^* = 1/x$ , de modo que

### Ejemplo 5.1. Ajuste lineal del tipo $y=a_1+a_2x$

El ajuste lineal es fundamental en la teoría de la regresión y muchas funciones no-lineales se dejan ajustar con relativa facilidad gracias a que pueden ser transformadas en una función lineal equivalente. Los datos de la siguiente tabla, por ejemplo, fueron generados según un modelo lineal de la forma

$$y_i = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 x_i + \varepsilon_i$$

donde  $\tilde{a}_1 = 0.5$ ,  $\tilde{a}_2 = 2$  y  $\varepsilon_i$  era un ruido gaussiano de la forma  $N(0,1)$ .

$x_i$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y_i$	-6.89	-4.93	-5.36	-0.96	2.32	2.42	4.43	5.73	7.91	9.18

Ahora queremos proceder en sentido inverso, ajustando los datos de la tabla a una función lineal por el MMC.

Según se dijo antes, el objetivo en este caso será:

$$\text{Min} \left\{ q = \sum_{i=1}^{10} [y_i - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \cdot x_i]^2 \right\}$$

Procedemos entonces a derivar la sumatoria  $q$  con respecto a  $A(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$  y a igualar a cero las derivadas. Esto es:

$$\frac{\partial q}{\partial a_1} = -2 \sum (y_i - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \cdot x_i) = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial a_2} = -2 \sum (y_i - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \cdot x_i) \cdot x_i = 0$$

donde las sumatorias sabemos que operan sobre las  $N=10$  parejas de datos  $(x_i, y_i)$ . Y tras desarrollar estas ecuaciones obtenemos las fórmulas siguientes para el intercepto

y la pendiente de la recta:

$$\hat{a}_1 = y - a_2 x$$

$$a_2 = \frac{\sum x_i y_i - y \sum x_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i}$$

donde  $N\bar{x} = \sum x_i$  y  $N\bar{y} = \sum y_i$ . Un vistazo a estas fórmulas deja en claro que el valor de los parámetros depende exclusivamente de la información disponible y que el ajuste lineal se puede realizar a condición de tener  $N \geq 2$ . Tomando los datos del ejemplo, obtenemos pues los valores:

$$a_1=0.457 \qquad a_2=1.856$$

A los cuales corresponden los siguientes errores relativos, evaluados con respecto al modelo original:

$$\xi_{a1} = \frac{\Delta a1}{a1} = \frac{0.457 - 0.5}{0.5} = -8.6\%$$

$$\xi_{a2} = \frac{\Delta a2}{a2} = \frac{1.856 - 2.0}{2.0} = -7.2\%$$

¿Por qué son estos errores tan grandes? ¿Nos habremos equivocado en algo? Definitamente no: errores más pequeños en los parámetros de ajuste sólo se podrían haber obtenido con una base de datos más amplia; y, por el contrario, si la información hubiera sido más reducida, también habría sido mayor la magnitud de los errores. De esta manera la información experimental ayuda a precisar una relación funcional en el proceso de ajuste.

Ahora bien, según se demostrar (Ryan), el valor estimado de la ordenada correspondiente a una abscisa determinada  $x_0$  se puede calcular con la fórmula:

$$y_0 = \hat{y}_0 \pm t(\alpha/2, n-2).sd. \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \qquad (5.6)$$

Donde:

$$\hat{y}_0 = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 x_0 \qquad sd = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 x_i)^2}{n-2}} \qquad S_{xx} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-2}$$

Así pues, volviendo al ejemplo anterior, con  $sd=1.03748$ ,  $t=2.306$  y  $S_{xx}=10.3125$ , vemos que el modelo lineal produce:

Para	$x_0 = \bar{x} = 0.5$	$y=1.4 \pm 2.5$
	$x_0 = 6.0$	$y=11.6 \pm 4.8$

Estos resultados muestran como el intervalo de predicción crece a medida que  $x_0$  se

aleja del valor medio de las abscisas experimentales. Además, si los comparamos con lo que resultaría de la fórmula (5-8), según la cual  $\pm\Delta y=2.07$ , concluimos que en todo caso aquella sobreestima la capacidad de predicción del ajuste  $\hat{y} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 x$ .

Igualmente se puede demostrar (Ryan) que los parámetros del modelo, incluidos los intervalos de confianza, corresponden a las expresiones:

$$a_1 = \hat{a}_1 \pm t(\alpha/2, n-2).sd. \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}} \quad (5.7)$$

$$a_2 = \hat{a}_2 \pm t(\alpha/2, n-2). \frac{sd}{\sqrt{S_{xx}}} \quad (5.8)$$

De manera que en nuestro ejemplo, para una confiabilidad C=95%, tenemos:

$$a_1 = 0.457 \pm 2.306 \times 1.03748 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{0.5^2}{10.3125}} = 0.5 \pm 0.8$$

$$a_2 = 1.856 \pm 2.306 \times \frac{1.03748}{\sqrt{10.3125}} = 1.9 \pm 0.8$$

Aunque los errores relativos en los parámetros son altos, se observa que ambos intervalos incluyen el valor original de los parámetros,  $a_1=0.5$  y  $a_2=2.0$ .

### Ejemplo 5.2. Ajuste lineal del tipo $y=bx$

Cuando el modelo de ajuste tiene la forma de una línea recta que pasa por el origen, se obtiene la siguiente fórmula para la pendiente:

$$b = \hat{b} \pm \Delta b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \pm t(\alpha/2, n-1). \frac{sd}{\sqrt{\sum x_i^2}} \quad (5.9)$$

Donde:

$$sd = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{b}x_i)^2}{n-1}}$$

Y la ordenada de la recta para un  $x_0$  cualquiera se expresa como:

$$y_0 = \hat{y}_0 \pm \Delta y = \hat{b}x_0 \pm t(\alpha/2, n-1).sd. \sqrt{1 + \frac{x_0^2}{\sum x_i^2}} \quad (5.10)$$

Para mostrar cómo se opera con los datos numéricos, considere la siguiente tabla de datos experimentales:

X	1	2	3	4	5
X <sup>2</sup>	1	4	9	16	25
Y	1.9	9.3	21.5	42.0	53.0

Se supone que los datos corresponden a una función parabólica del tipo  $Y=aX^2$  y se busca el valor del coeficiente a incluyendo el límite de precisión del 90%.

Para encontrar el parámetro se tienen, en principio, dos opciones: ajustar una parábola por el método de mínimos cuadrados con base en las parejas de datos (X,Y) o ajustar una línea recta sin intercepto con las parejas de datos (X<sup>2</sup>,Y). Esta segunda opción permite, además, estimar la confiabilidad requerida para el parámetro. Al proceder de este modo se obtiene:

$$a = \frac{\sum X_i^2 Y_i}{\sum X_i^4} \pm t \frac{sd}{\sqrt{\sum X_i^4}}$$

Con n=5:  $sd = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - aX_i^2)^2}{n-1}} = 3.44967, \quad t(C = 90\%, \nu = 4) = 2.132$

Por tanto:  $a = 2.27 \pm 2.132 \frac{3.44967}{\sqrt{979}} = 2.27 \pm 0.235$ . Y dado que el orden de magnitud del error total en a es de décimas, lo más conveniente es escribir la respuesta como:

$$a = 2.3 \pm 0.2$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una hipérbola de la forma  $y = \frac{C}{X}$  se debe ajustar a los siguientes datos.

$$(x, y) = (2.00, 0.47), (3.00, 0.34), (4.00, 0.26), (5.00, 0.19).$$

2. Una curva de la forma  $Y = C \ln X$  debe ajustarse con los siguientes datos:

$$(x, y) = (2.00, 3.81), (3.00, 6.01), (4.00, 7.65), (5.00, 8.86).$$

3. Ajuste la función del tipo  $Y = A + bX$  a los siguientes datos experimentales:

$$(x, y) = (0,0), (1, 1), (2,1), (2,1)$$

¿Cuál es el límite de precisión de la pendiente de la recta en el ajuste anterior?

4. Se sometió a tracción una probeta cilíndrica de acero. Los resultados fueron:

$\delta L/L(10^{-6})$	1.96	2.97	4.68	5.74	9.17	20.9	32.0
$\sigma$ (psi)	580	920	1480	1705	2750	6025	9800

$\delta L/L(10^{-6})$	40.7	46.5	51.3	68.4	83.9	100.0	110.0
$\sigma$ (psi)	12100	14095	16025	20120	25040	30370	34450

En esta tabla  $\delta L/L$  (mm/mm) representa la deformación longitudinal unitaria de la probeta y  $\sigma$ (psi) el esfuerzo de tracción en cada prueba. Estime el valor del módulo elástico del material, definido como  $E = \sigma / (\delta L/L)$ , y el ancho de la banda de confianza para  $\delta L/L = 130 \times 10^{-6}$ . Discuta los resultados.

5. Múltiples mediciones meteorológicas han permitido constatar que, en circunstancias normales, el perfil medio de temperaturas en la troposfera tiende a disminuir linealmente con la altura. A continuación se incluyen los datos de temperatura media en varias estaciones meteorológicas de la región cafetera, tomados el día 1 de agosto

de 1987. Calcule con esta información los parámetros de la ecuación

$$T = T_o - \lambda z$$

Donde T es la temperatura y z representa la altura con respecto al nivel del mar de la estación correspondiente. Tenga en cuenta que en la atmósfera estándar  $\lambda=6.5^\circ\text{C}/\text{km}$ . ¿Cuál sería entonces la temperatura media en Medellín? ¿En Cartagena? Discuta los resultados.

Municipio	Departamento	Z (m)	Temperatura (°C)
Venecia	Antioquia	1600	18.5
Jardín	Antioquia	1570	19.0
Moniquirá	Boyacá	1700	17.4
Supía	Caldas	1320	21.3
Marquetalia	Caldas	1450	18.0
Manizales	Caldas	2150	16.3
Palestina	Caldas	1010	23.3
Timbío	Cauca	1850	16.6
Gigante	Huila	1500	18.7
Chinácota	Norte de Santander	1235	26.8
Chaparral	Tolima	990	22.1
Trujillo	Valle del Cauca	1380	20.2

6. Se requiere estimar la constante de al hipérbola equilátera  $XY=A$  los siguientes son los datos:

X	0.4	0.5	0.8	1.9
Y	9.9	7.7	3.9	2.3

7. Ajuste una función del tipo  $Y = Ae^{BX}$  para los datos:

X	2.1	4.2	5.0	6.5
Y	6.5	52.2	280	550

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Coleman, H y W. Steele. *Experimentation and Uncertainty Análisis for Engineers*. John Wiley and Sons. 1989.

Mandel, J. *The Statistical Analysis of Experimental Data*. Dover Publ. New York, 1964.

Meyer, P. *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. Fondo Educativo Interamericano, S.A. México, 1973.

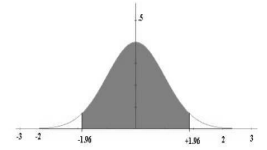
Spiegel, M. *Estadística*. McGraw-Hill. México, 1970.

# APÉNDICES



**Tabla A-1. Distribución gaussiana centrada en  $\mu$**

$\tau$	Prob( $\tau$ )	$\tau$	Prob( $\tau$ )	$\tau$	Prob( $\tau$ )	$\tau$	Prob( $\tau$ )
0.00	0.0000	1.00	0.6827	2.00	0.9545	3.00	0.9973002
0.02	0.0160	1.02	0.6923	2.02	0.9566	3.05	0.9977115
0.04	0.0319	1.04	0.7027	2.04	0.9586	3.10	0.9980647
0.06	0.0478	1.06	0.7109	2.06	0.9606	3.15	0.9983672
0.08	0.0638	1.08	0.7199	2.08	0.9625	3.20	0.9986257
0.10	0.0797	1.10	0.7287	2.10	0.9643	3.25	0.9988459
0.12	0.0955	1.12	0.7373	2.12	0.9660	3.30	0.9990331
0.14	0.1113	1.14	0.7457	2.14	0.9676	3.35	0.9991918
0.16	0.1271	1.16	0.7540	2.16	0.9692	3.40	0.9993261
0.18	0.1428	1.18	0.7620	2.18	0.9707	3.45	0.9994394
0.20	0.1585	1.20	0.7699	2.20	0.9722	3.50	0.9995347
0.22	0.1741	1.22	0.7775	2.22	0.9736	3.55	0.9996147
0.24	0.1897	1.24	0.7850	2.24	0.9749	3.60	0.9996817
0.26	0.2051	1.26	0.7923	2.26	0.9762	3.65	0.9997377
0.28	0.2205	1.28	0.7995	2.28	0.9774	3.70	0.9997843
0.30	0.2358	1.30	0.8064	2.30	0.9786	3.75	0.9998231
0.32	0.2510	1.32	0.8132	2.32	0.9797	3.80	0.9997552
0.34	0.2661	1.34	0.8198	2.34	0.9807	3.85	0.9998818
0.36	0.2812	1.36	0.8262	2.36	0.9817	3.90	0.9999037
0.38	0.2961	1.38	0.8324	2.38	0.9827	3.95	0.9999218
0.40	0.3108	1.40	0.8385	2.40	0.9836	4.00	0.9999366
0.42	0.3255	1.42	0.8444	2.42	0.9845	4.05	0.9999487
0.44	0.3401	1.44	0.8501	2.44	0.9853	4.10	0.9999586
0.46	0.3545	1.46	0.8557	2.46	0.9861	4.15	0.9999667
0.48	0.3688	1.48	0.8611	2.48	0.9869	4.20	0.9999732
0.50	0.3829	1.50	0.8664	2.50	0.9876	4.25	0.9999786
0.52	0.3969	1.52	0.8715	2.52	0.9883	4.30	0.9999829
0.54	0.4108	1.54	0.8764	2.54	0.9889	4.35	0.9999863
0.56	0.4245	1.56	0.8812	2.56	0.9895	4.40	0.9999891
0.58	0.4381	1.58	0.8859	2.58	0.9901	4.45	0.9999911
0.60	0.4515	1.60	0.8904	2.60	0.9907	4.50	0.9999931
0.62	0.4647	1.62	0.8948	2.62	0.9912	4.55	0.9999946
0.64	0.4778	1.64	0.8990	2.64	0.9917	4.60	0.9999957
0.66	0.4907	1.66	0.9031	2.66	0.9922	4.65	0.9999966
0.68	0.5035	1.68	0.9070	2.68	0.9926	4.70	0.9999973
0.70	0.5161	1.70	0.9109	2.70	0.9931	4.75	0.9999979
0.72	0.5285	1.72	0.9146	2.72	0.9935	4.80	0.9999984
0.74	0.5407	1.74	0.9181	2.74	0.9939	4.85	0.9999987
0.76	0.5527	1.76	0.9216	2.76	0.9942	4.90	0.9999990
0.78	0.5646	1.78	0.9249	2.78	0.9946	4.95	0.9999992
0.80	0.5763	1.80	0.9281	2.80	0.9949	5.00	0.9999994
0.82	0.5878	1.82	0.9312	2.82	0.9952		
0.84	0.5991	1.84	0.9342	2.84	0.9955		
0.86	0.6102	1.86	0.9371	2.86	0.9958		
0.88	0.6211	1.88	0.9399	2.88	0.9960		
0.90	0.6319	1.90	0.9426	2.90	0.9963		
0.92	0.6424	1.92	0.9451	2.92	0.9965		
0.94	0.6528	1.94	0.9476	2.94	0.9967		
0.96	0.6629	1.96	0.9500	2.96	0.9969		
0.98	0.6729	1.98	0.9523	2.98	0.9971		



**Tabla A-2. La distribución t-Student**

<b>v</b>	<b>C</b>				
	<b>0.900</b>	<b>0.950</b>	<b>0.990</b>	<b>0.995</b>	<b>0.999</b>
1	6.314	12.706	63.657	127.321	636.619
2	2.920	4.303	9.925	14.089	31.598
3	2.353	3.182	5.841	7.453	12.924
4	2.132	2.776	4.604	5.598	8.610
5	2.015	2.571	4.032	4.773	6.869
6	1.943	2.447	3.707	4.317	5.959
7	1.895	2.365	3.499	4.029	5.408
8	1.860	2.306	3.355	3.833	5.041
9	1.833	2.262	3.250	3.690	4.781
10	1.812	2.228	3.169	3.581	4.587
11	1.796	2.201	3.106	3.497	4.437
12	1.782	2.179	3.055	3.428	4.318
13	1.771	2.160	3.012	3.372	4.221
14	1.761	2.145	2.977	3.326	4.140
15	1.753	2.131	2.947	3.286	4.073
16	1.746	2.120	2.921	3.252	4.015
17	1.740	2.110	2.898	3.223	3.965
18	1.734	2.101	2.878	3.197	3.922
19	1.729	2.093	2.861	3.174	3.883
20	1.725	2.086	2.845	3.153	3.850
21	1.721	2.080	2.831	3.135	3.819
22	1.717	2.074	2.819	3.119	3.792
23	1.714	2.069	2.807	3.104	3.768
24	1.711	2.064	2.797	3.090	3.745
25	1.708	2.060	2.787	3.078	3.725
26	1.706	2.056	2.779	3.067	3.707
27	1.703	2.052	2.771	3.057	3.690
28	1.701	2.048	2.763	3.047	3.674
29	1.699	2.045	2.756	3.038	3.659
30	1.697	2.042	2.750	3.030	3.646
40	1.684	2.021	2.704	2.971	3.551
60	1.671	2.000	2.660	2.915	3.460
120	1.658	1.980	2.617	2.860	3.373
$\infty$	1.645	1.960	2.576	2.807	3.291

Los valores están dados para un intervalo de confianza C y un número de grados de libertad v